

HEINAŁ OSWIATOWY

NR 3/191
2020

Miesięcznik Małopolskiego Centrum Doskonalenia Nauczycieli
www.mcdn.edu.pl

Ukazuje się od 1992 r.

ISSN 1233-7609

Kształtowanie kompetencji
matematyczno-przyrodniczych
uczniów



Od redakcji

Zagadnienia oświatowo-edukacyjne

Agnieszka Nocoń

O znaczeniu edukacji matematycznej w przedszkolu 3

Monika Szczygiel

Co się kryje za lękiem przed matematyką u dzieci
rozpoczynających naukę szkolną? 6

Dorota Długosz

Tajemnice tangramu. Przykłady wykorzystania tangramu w kształceniu
matematycznych umiejętności uczniów szkoły podstawowej 8

Joanna Major, Maciej Major

Kształtowanie wybranych kompetencji kluczowych
w nauczaniu matematyki 10

Małgorzata Iwanowska, Beata Wąsowska-Narojczyk

Kształtowanie kompetencji miękkich na lekcjach matematyki
w szkole podstawowej 13

Witold Pająk

O stosowaniu metod motywujących i aktywizujących
na lekcjach matematyki w liceum 16

Damian Cisowski

Alfy, bety i omegi... 18

Bronisław Pabich

Odkrywanie matematyki i zadziwienie jej pięknem 20

Tadeusz Marczewski, Zbigniew Powązka

Przyroda generuje problemy matematyczne 21

Robert Czuchnowski

Strategia nauczania przedmiotów przyrodniczych oparta
o dociekanie naukowe 24

Z naszych doświadczeń – przykłady dobrej praktyki

Gabriela Dolińska

Wspomnienia z matematycznych wędrówek po krainie
wyobraźni i uczniowskich możliwości 27

Tadeusz Marczewski

Ze wstęgą Möbiusa na II Małopolskich Dniach Rodziny 30

Grzegorz Hudziak

Rola doświadczeń w rozumieniu chemii 32

Zdarzyło się

Halina Pulchny

Matematycznie zakręcenie,
czyli o nauczaniu matematyki z pasją 34

Informacje i komunikaty

„Jan Paweł II – Polak, Papież, Człowiek. Historia ukryta w lapbooku” –
konkurs dla uczniów kl. IV-VI szkół podstawowych 35

Miesięcznik „Hejnał Oświatowy” można otrzymać w siedzibach Małopolskiego Centrum Doskonalenia Nauczycieli: MCDN Ośrodek w Krakowie, ul. Garbarska 1; MCDN Ośrodek w Nowym Sączu, ul. Jagiellońska 61; MCDN Ośrodek w Oświęcimiu, ul. Bema 4; MCDN Ośrodek w Tarnowie, ul. Nowy Świat 30.

Wydawca:

Małopolskie Centrum Doskonalenia Nauczycieli

Rada Wydawnicza:

dr Łukasz Cieślak (przewodniczący, dyrektor MCDN), Małgorzata Dutka-Mucha, Zygmunt Fryczek, Barbara Ledwoń, Ewa Sojat

Rada Redakcyjna:

prof. dr hab. Stanisław Palka (przewodniczący) – UJ, dr hab. Krystyna Ablewicz prof. UJ, dr hab. Władysław Błasiak prof. UP, SWPW, Lech Gawryłow – OKE w Krakowie, dr Krzysztof Gerc – UJ, dr hab. Jolanta Karbowniczek prof. Ignatianum, dr Iwona Ocetkiewicz – UP, dr hab. Teresa Olearczyk prof. KA, prof. dr hab. Marian Śnieżyński – UPJP2

Redaguje zespół w składzie:

Daria Grodzka (redaktor naczelna), dr hab. Małgorzata Kaliszewska prof. UJK, Joanna Peter (OKE w Krakowie), Marzena Sula-Matuszkiewicz (PBW w Krakowie), Halina Wesołowska (wicedyrektor MCDN), Sylwester Kopeć (sekretarz redakcji) oraz zespół nauczycieli konsultantów MCDN: dr Ilona Dudzik-Garstka, dr Małgorzata Jaśko, Mariola Kozak, Wojciech Papaj

Redaktor naczelna:

Daria Grodzka
tel.: (12) 61 71 111; fax: (12) 623 77 41
d.grodzka@mcdn.edu.pl

Adres redakcji:

Redakcja „Hejnał Oświatowy”
ul. Lubelska 23 (MCDN)
30-003 Kraków
tel.: 12 61 71 111; fax: 12 623 77 41
http://hejnaloswiatowy.mcdn.edu.pl

Opracowanie materiałów i korekta:

Anna Róża Kuncewicz

Warunki przyjmowania materiałów:

Materiały do publikacji należy przesłać na adres redaktor naczelnej: d.grodzka@mcdn.edu.pl
Tekst: o objętości do 10 tys. znaków ze spacjami, format Word for Windows, czcionka Times New Roman; rozmiar czcionki 12; odstęp wiersza 1,5; wymagane tytuł i krótkie wprowadzenie – lead; krótka informacja o autorze; przypisy i bibliografia zamieszczone pod tekstem.

Redakcja zastrzega sobie prawo do redakcji i dokonywania zmian formalnych w artykułach. Redakcja nie zwraca nadesłanych materiałów oraz zastrzega sobie odmowę publikacji materiału bez podania przyczyny.

Przedruk materiałów publikowanych w „Hejnale Oświatowym” bez zgody wydawcy jest zabroniony. Zakaz nie dotyczy cytowania publikacji z powołaniem na źródło. Czasopismo ukazuje się w wersji papierowej (wersja pierwotna) oraz on-line.

Nakład 1000 egzemplarzy

Skład i druk: Firma Usługowo-Handlowa „SZMYDT”

ISSN 1233-7609

Od redakcji

Drodzy
Czytelnicy

Trzeci w tym roku numer „Hejnału Oświatowego” zawiera przede wszystkim teksty przedstawiające problematykę rozwijania kompetencji matematycznych uczniów. Jest to jeden z podstawowych kierunków realizacji polityki oświatowej państwa w bieżącym roku szkolnym.

Autorzy artykułów przekonują, że możemy sami się zadziwiać matematyką i nauczyć zadziwiać nią swoich uczniów, a jedynym z gwarantów wszechstronnego wykształcenia matematycznego uczniów jest rozwiązywanie przez nich różnorodnych zadań matematycznych.

Autorzy pokazują, jak motywować młodych ludzi do uczenia się matematyki, a także prezentują przykłady dobrych praktyk w kształceniu matematycznych umiejętności uczniów, m.in. takich jak wykorzystanie tangramu na lekcjach. Stwierdzają także, że niektóre dzieci już w wieku wczesnoszkolnym odczuwają lęk przed matematyką. Jest on przede wszystkim związany ze strachem przed popełnieniem błędu, otrzymaniem złej oceny, trudnością zadań, presją czasową i reakcją innych osób.

W tym wydaniu „Hejnału” można także przeczytać tekst, który stanowi wprowadzenie do metodologii nauczania przedmiotów przyrodniczych opartego o dociekanie (odkrywanie) naukowe. We wspomnianym artykule autor przedstawił najbardziej efektywny w tej strategii, 5-etapowy cykl nauczania i uczenia się oraz rozwijane umiejętności uczniów. Życzę miłej lektury!

Daria Grodzka
redaktor naczelna
„Hejnal Oświatowy”

O znaczeniu edukacji
matematycznej w przedszkolu

Agnieszka Nocoń

Rozwijanie kompetencji matematycznych stanowi kamień milowy w rozwoju starszych przedszkolaków i ukierunkowanie na przyszły sukces uczniów klas I–III szkoły podstawowej.

Dziecko pojawiające się w przedszkolu styka się z nowymi sytuacjami społeczno-poznawczymi. To właśnie tam rozpoczyna się kolejny etap rozwoju człowieka kształtowana i rozwoju jego osobowości, jak i umiejętności. Czas ten według Erika H. Eriksona trwa cały czas od narodzin aż do śmierci. Wyróżniając w życiu osiem etapów, tzw. „kamieni milowych”, chciałam się zatrzymać nad czwartym etapem, okresem między piątym a szóstym rokiem życia dziecka (tzw. starszego przedszkolaka), a czasem około dwunastego roku życia kończącym ten etap. Jest to okres szczególnie ważny, gdyż wtedy dziecko poznaje lepiej swoje możliwości, buduje i rozwija swoje kompetencje przez działanie, odkrywanie i wszelką działalność poznawczą.

Zadaniem nauczyciela na tym etapie edukacji przedszkolnej, a później wczesnoszkolnej, będzie wspomaganie rozwoju umysłowego swojego wychowanka wraz z edukacją matematyczną w taki sposób, aby zapewnić starszemu przedszkolakowi dobry start w szkole, a uczniowi klas I–III pomóc poznać i rozwijać swoje możliwości i umiejętności w tej dziedzinie wiedzy. Wspierać w odnoszeniu sukcesów na kolejnych szczeblach edukacji. Zatem nasuwają się pytania: Jak możemy pomagać dziecku/uczniowi w rozwijaniu kompetencji matematycznych? Co jest najważniejsze?

Podstawa programowa wychowania przedszkolnego jasno określa cele, które służą wspomaganie rozwoju dzieci w zakresie kształtowania pojęć matematycznych, uwzględniając ich potrzeby i możliwości rozwojowe oraz uwarunkowania środowiskowe. Dojrzałość szkolną do uczenia



Fot. A. Nocoń

się matematyki dziecko powinno osiągnąć jeszcze przed rozpoczęciem nauki w szkole. Tylko wtedy jest możliwe uniknięcie wszelkich niepowodzeń i trudności związanych z przyswajaniem sobie treści matematycznych. Wśród dzieci rozpoczynających naukę w przedszkolu różnice w tempie rozwoju umysłowego są często znaczne i mogą wynosić nawet kilka lat (ma na to wpływ wiele czynników, m.in.: dziecko rozpoczęło edukację w placówce dopiero w wieku 5 lat, częsta absencja, niepełnosprawność intelektualna dziecka). Dlatego jest bardzo ważne, aby nauczyciele pracujący z dziećmi sześciolatkami dokonywali rzetelnych obserwacji i skrupulatnie badali dojrzałość szkolną dziecka.

W książce, która stała się już niejako wyznacznikiem do wspierania nauczycieli (jak i rodziców) w kształtowaniu dzieci na drodze do sukcesu uzdolnień matematycznych, można przeczytać cenną zasadę, aby „w edukacji matematycznej połączonej ze

wspomaganiem rozwoju umysłowego dzieci (...) pamiętać o konieczności zachowania porządku merytorycznego we wprowadzaniu nowych treści¹.

Edukacja matematyczna w przedszkolu ma więc przygotować dzieci do posługiwania się pewnymi pojęciami matematycznymi, do zrozumienia których dochodzą poprzez samodzielne działanie, według ustalonych schematów, lecz w sposób kreatywny i różnorodny. Dla uzyskania prawidłowych wyników w rozwijaniu myślenia matematycznego konieczne jest przemyślane, staranne i systematyczne przygotowywanie się nauczyciela do zajęć. Szukanie nowych pomysłów czy korzystanie i włączanie się do działań w różnorodnych programach edukacyjnych skierowanych wprost na poszerzanie kompetencji matematycznych dzieci. Praca własna dziecka wraz z częstą powtórką dla utrwalenia oraz towarzyszenie w niej nauczyciela daje najlepsze możliwości do poszukiwania i zdobywania własnych doświadczeń matematycznych.

W kształtowaniu kompetencji matematycznych dziecka ważne jest, aby dopasować do tego to, co nauczyciel jako planista działań chce wprowadzać i doskonalić na zajęciach, a co jego wychowankowie już opanowali w sposób dobry. Każdy z nas pracujących z dziećmi w edukacji przedszkolnej pamięta o tej zasadzie. Niestety

z obserwacji pracy nauczycieli w klasach I–III mogę stwierdzić, iż ta zasada bywa zapomniana. Niejednokrotnie pracujący pod presją czasu i realizacji programu nauczyciele działają bez refleksji i szablonowo.

Według E. Gruszczyk-Kolczyńskiej celem edukacji matematycznej w przedszkolu powinno być:

- rozwijanie inteligencji operacyjnej, czyli wspomaganie rozwoju dziecka poprzez kształtowanie procesów różnicowania i klasyfikacji, przekształcania, umiejętności wyznaczania konsekwentnych serii, przewidywania wydarzeń, po doświadczeniu z zastosowaniem obranej jednostki pomiaru;
- kształtowanie odporności emocjonalnej, czyli stwarzanie warunków do rozwoju zdolności kierowania zachowaniem umożliwiającym rozwiązanie zadania wymagającego wysiłku opanowania napięcia, czyli: wdrażanie do rozumienia komunikatów, uczenie sposobów radzenia sobie z przeszkodami utrudniającymi wykonanie zadania, rozwijanie zdolności do znoszenia nadmiernych napięć emocjonalnych;
- kształtowanie intuicji matematycznych, czyli nauka liczenia z przestrzeganiem następujących reguł: każdy liczony przedmiot dziecko wskazuje gestem i wymawia kolejny liczebnik, nie pomija liczonych

przedmiotów i nie liczy podwójnie, liczebniki wymawia w stałej kolejności, ostatni liczebnik określa liczbę wszystkich liczonych obiektów, wynik liczenia nie zależy od kolejności liczenia;

- wdrażanie do układania i rozwiązywania prostych zadań czyli zdobywanie umiejętności przekształcania sytuacji życiowych w zadania „do rozwiązania”, stopniowe wdrażanie dzieci w strategię intelektualne potrzebne do zdobycia tej umiejętności².

W zdobywaniu doświadczeń matematycznych ogromne znaczenie mają trening, jego częstotliwość i jakość. W ten sposób są rozwijane umiejętności dziecka, które w sposób płynny przechodzi do kolejnych etapów doskonalenia umiejętności przeliczania. Organizowane przez nauczyciela sytuacje dydaktyczne sprawiają, że ćwiczenie dziecięcego liczenia poprzez różnorodne zabawy umożliwiające manipulowanie oraz wykorzystanie każdej życiowej sytuacji do wzbogacania liczby doświadczeń matematycznych bardzo pomaga w zdobywaniu kompetencji intelektualnych do uczenia się matematyki. Owocuje także wysokim stopniem przyswojenia przez dziecko pojęć i umiejętności matematycznych potrzebnych w kolejnych latach nauki.

Podstawa programowa wychowania przedszkolnego określa, jakie umiejętności powinno mieć dziecko kończące przedszkole i rozpoczynające naukę w szkole podstawowej:

- liczy obiekty i rozróżnia błędne liczenie od poprawnego;
- wyznacza wynik dodawania i odejmowania, pomagając sobie liczeniem na palcach lub na innych zbiorach zastępczych;
- ustala równoliczność dwóch zbiorów, a także posługuje się liczebnikami porządkowymi;
- rozróżnia stronę lewą i prawą, określa kierunki i ustala położenie obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów;
- wie, na czym polega pomiar długości, i zna proste sposoby mierzenia: krokami, stopa za stopą; zna stałe



następstwo dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku³.

Te wszystkie umiejętności zostaną przez dziecko przyswojone, jeżeli w jego kształceniu będzie zachowany porządek rozwojowy i stopniowe narastanie kształtowanych kompetencji bez nachalnego przeciążania dziecka. Jak zawsze i we wszystkim potrzebne są zdrowy rozsądek i umiar, taka sama zależność pojawia się w kształtowaniu kompetencji matematycznych u dziecka.

Treści realizowane w edukacji matematycznej powinny więc mieć logikę edukacyjną czyli odpowiedni układ oraz kolejność wprowadzania dla najlepszych efektów. W swojej pracy stosuję od lat rozwijanie kompetencji matematycznych dzieci w oparciu o metodę prof. Edyty Gruszczyk-Kolczyńskiej, gdzie wskazany jest usystematyzowany układ wprowadzanych treści w sposób następujący:

- orientacja przestrzenna i porozumiewanie się z innymi – jako umiejętności określania przez dziecko miejsca w otoczeniu oraz budowania swobodnych wypowiedzi na jego temat. Co w przyszłości będzie prowadziło do nabywania umiejętności związanych z kodowaniem i odczytywaniem zakodowanych informacji graficznych oraz rozumieć sens pomiaru, długości bądź innych zasad geometrii;
- rytmy – rozwijające zdolność dziecka do skupiania uwagi, tym samym w przyszłości pomogą podczas liczenia czy dostrzeganiu regularności w systemie dziesiętkowym. Będą pomocne również w rozumieniu pomiaru długości, pojemności, ciężaru czy czasu;
- kształtowanie umiejętności liczenia /rachowanie w szerokim zakresie;
- myślenie przyczynowo-skutkowe;
- doskonalenie umiejętności klasyfikowania;
- wspomaganie rozwoju myślenia operacyjnego u starszych przedszkolaków i kształtowanie liczby naturalnej u uczniów klas I–III szkoły podstawowej;
- układanie i rozwiązywanie zadań arytmetycznych;
- mierzenie płynów;

- dokonywania pomiarów przy użyciu wagi;
- wprowadzenie określania wyników pomiaru czasu i osadzanie wyników w czasie;
- intuicje geometryczne – które zostaną w późniejszym okresie przekształcone w zarys pojęć geometrycznych;
- konstruowanie gier przez dzieci i dla dzieci⁴.

Wspomaganie rozwoju umysłowego dzieci wraz z rozwojem kompetencji matematycznych dzieci jest tak bogate poznawczo i często trudne organizacyjnie, że należy upraszczać działania. Wszystkie zajęcia edukacyjne z zakresu edukacji matematycznej muszą być tak organizowane, aby każde dziecko funkcjonowało według własnych możliwości umysłowych oraz maksymalnie korzystało z procesu uczenia się, dzięki temu otrzymamy jak najlepsze efekty.

Wyznaczając sobie za cel nauczanie dziecka matematyki w przedszkolu, trzeba koniecznie poznać jego możliwości w zakresie rozwoju psychologicznego, mieć indywidualne podejście do każdego dziecka, bo każde ma swoje tempo rozwoju, a jego procesy poznawcze są na różnych etapach. Rozpoznanie twórczego potencjału to docenienie możliwości dzieci oraz ich wzmacnianie i nagradzanie, budowanie pozytywnej samooceny dzieci.

Ważną rolę w tym okresie odgrywa kreatywność nauczyciela, która powinna polegać na atrakcyjnym prowadzeniu zajęć, umiejętnym wykorzystaniu zaistniałych sytuacji, a przede wszystkim wprowadzaniu dzieci w świat matematyki w taki sposób, aby ona zainteresowała i inspirowała ich do podejmowania samodzielnych działań.

Warto również w swoich działaniach wspierać się gotowymi pomocami dydaktycznymi, które dają wachlarz pomysłów i rozwiązań w realizacji poszczególnych obszarów z zakresu matematyki. Wskazane jest korzystanie z różnych programów i projektów edukacyjnych, które mogą zarówno dzieciom, jak i nauczycielom uatrakcyjnić zajęcia, jak również wzbogacić o nowe doświadczenia. Doświadczenie i eksperymentowanie to podstawa

edukacji i to dzięki nim w naturalny sposób dzieci się uczą, nabywając kompetencji matematycznych.

Słowa kluczowe: kompetencje matematyczne, edukacja matematyczna, edukacja przedszkolna.

Przypisy:

¹ E. Gruszczyk-Kolczyńska, E. Zielińska, *Dziecięca matematyka dwadzieścia lat później*, Kraków 2015.

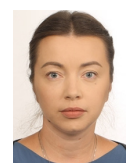
² E. Gruszczyk-Kolczyńska, E. Zielińska, *Wspomaganie dzieci w rozwoju do skupienia uwagi i zapamiętywania*, Warszawa 2005.

³ Podstawa programowa wychowania przedszkolnego; <https://www.ore.edu.pl/wp-content/uploads/2017/05/wychowanie-przedszkolne-i-edukacja-wczesnoszkolna.-pp-z-komentarzem.pdf> (dostęp: 5 II 2020).

⁴ E. Gruszczyk-Kolczyńska, E. Zielińska, *Dziecięca matematyka dwadzieścia lat później*, Kraków 2015, s. 19–23.

Bibliografia:

- Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E.: *Dziecięca matematyka dwadzieścia lat później*. Kraków: Wydawnictwo Bliżej Przedszkola, 2015.
- Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E.: *Wspomaganie dzieci w rozwoju do skupienia uwagi i zapamiętywania*. Warszawa: WSiP, 2005.
- Gruszczyk-Kolczyńska E.: *Wyrównywanie szans edukacyjnych dzieci a kształcenie nauczycieli przedszkola*, [w:] *Rozwój zawodowy nauczyciela*, red. H. Moroz, Kraków: Impuls, 2005.
- Podstawa programowa wychowania przedszkolnego; <https://www.ore.edu.pl/wp-content/uploads/2017/05/wychowanie-przedszkolne-i-edukacja-wczesnoszkolna.-pp-z-komentarzem.pdf> (dostęp: 5 II 2020).
- Stalmach-Tkacz A., Mucha K.: *Rozwój – Wychowanie – Edukacja*. Warszawa: Nowa Era, 2018.



Agnieszka Nocoń – nauczyciel edukacji wczesnoszkolnej i przedszkolnej, diagnosta, terapeuta psychologiczno-pedagogiczny, oligofrenopedagog.

Co się kryje za lękiem przed matematyką u dzieci rozpoczynających naukę szkolną?

dr Monika Szczygieł

Niektóre dzieci już w wieku wczesnoszkolnym odczuwają lęk przed matematyką, który jest związany ze strachem przed popełnieniem błędu, otrzymaniem złej oceny, trudnością zadań, presją czasu i reakcją innych osób.

Intensywność i początki lęku przed matematyką

Przez większy czas uważano, że lęk przed matematyką powstaje w wyniku kulminacji negatywnych doświadczeń związanych z uczeniem się matematyki (Dowker, Sarkar, Looi, 2016). Zgodnie z modelem rozwoju lęku przed matematyką zaproponowanym przez Hembree (1990), poziom lęku wzrasta wraz z kolejnymi etapami edukacji matematycznej, by osiągnąć najwyższy poziom w szkole średniej, a następnie powoli spada, lecz nie zanika w okresie dorosłości. Wśród badaczy powracało jednak pytanie o to, kiedy ten lęk się rozpoczyna i jakie czynniki wpływają na jego kształtowanie.

Prowadzone w ostatnim czasie badania wśród coraz młodszych uczniów wykazały, że już niektóre dzieci w wieku wczesnoszkolnym przejawiają symptomy lęku przed matematyką. Wyniki badań zespołów Ramirez, Gunderson, Levine, Beilock (2013) oraz Vukovic, Kieffer, Bailey, Harari (2013) wskazują także na to, że lęk przed matematyką negatywnie koreluje z osiągnięciami matematycznymi najmłodszych uczniów. Korelacyjny schemat badań nie pozwala odpowiedzieć na pytanie o to, czy lęk przed matematyką powoduje niskie osiągnięcia matematyczne, czy też niskie wyniki w obszarze matematyki prowadzą do lęku przed tą dziedziną nauki. Zgodnie z obecnie panującym poglądem, poziom lęku i osiągnięć matematycznych wzajemnie się determinują, lecz pytanie o źródła lęku przed matematyką są nadal aktualne.

W badaniu¹ wśród ponad trzystu dzieci w wieku wczesnoszkolnym

zauważono, że większość dzieci z klasy pierwszej i drugiej odczuwa niski poziom lęku przed matematyką, ale już w drugiej klasie poziom tego lęku jest istotnie wyższy. Część dzieci w ogóle nie przejawia obaw związanych z nauką matematyki, ale porównywalna część uczniów odznacza się umiarkowanym poziomem lęku przed matematyką. W zbadanej grupie zaobserwowano również uczniów, którzy już na początku edukacji odznaczają się bardzo silnym niepokojem przejawianym w obliczu uczenia się matematyki lub sprawdzania wiedzy matematycznej. Wyniki te sugerują, że lęk przed matematyką może się pojawiać już na pierwszym etapie edukacji szkolnej, dlatego tak ważne jest zrozumienie, co go determinuje.

Co takiego jest w matematyce, że można się jej bać?

W obliczu obecnych ustaleń dotyczących powstawania i rozwoju lęku przed matematyką postawiono pytanie o to, dlaczego dzieci, które mają tak niewiele doświadczeń w uczeniu się matematyki, mogą się jej bać. Wyniki przeprowadzonego badania, podobnie jak wyniki innych badań, wskazują, że lęk przed matematyką w pewnym stopniu może być wyjaśniony przez bardziej ogólne czynniki, takie jak ogólna lękowość dzieci lub obawa przed byciem testowanym.

Aby dowiedzieć się, dlaczego dzieci odczuwają lęk związany z matematyką, proszono je o podanie powodów tego lęku. Wśród najczęściej podawanych przez dzieci odpowiedzi pojawił się lęk związany z popełnieniem błędu, otrzymaniem złej oceny, strach związany

z rozwiązywaniem trudnych zadań oraz brakiem wystarczającego czasu na wykonanie zadań matematycznych (w trakcie lekcji lub w domu). Dzieci mówiły również, że obawiają się reakcji innych osób – rodziców, nauczycieli bądź rówieśników, szczególnie w obliczu doświadczanej porażki.

Liczne wypowiedzi dzieci wskazywały także na to, że dzieci chcą wiedzieć, czego się mogą spodziewać podczas lekcji lub sprawdzianu. Dzieci oczekują konkretnych informacji na temat tego, co będzie przedmiotem zajęć lub pracy pisemnej, a brak wiedzy na ten temat sprawia, że odczuwają one niepokój.

Środowiskowe wsparcie

Znaczna część dzieci w pierwszej i drugiej klasie szkoły podstawowej odczuwa niski poziom lęku przed matematyką, ale w drugiej klasie średni poziom lęku jest istotnie wyższy niż na początku edukacji matematycznej. To, że średni poziom lęku wzrasta wraz z wiekiem zostało potwierdzone również przez wyniki innych badań (Hembree, 1990). W związku z tym pojawia się konieczność podjęcia odpowiednich działań, które ograniczą pogłębianie się tego lęku w przyszłości. Z tego powodu sformułowano pewne wskazówki dotyczące tego, co konkretnie mogą zrobić nauczyciele lub rodzice, aby nie dopuścić do powstawania lub rozwoju lęku przed matematyką w przyszłości.

Po pierwsze, ważne jest to, aby opiekunowie kształtowali w dzieciach postawę, że popełnianie błędów (nie tylko na matematyce) nie jest niczym złym, zdarza się każdemu i stanowi immanentną część procesu uczenia się

matematyki. Zgodnie z wynikami badań Jamieson, Mendes, Nock (2013), wzbudzenie w uczniach przekonania, że rozwiązywanie zadań to wyzwanie, a nie zagrożenie, ogranicza poziom lęku, co pozytywnie wpływa na poziom wykonania zadań poznawczych.

Wydaje się więc, że nauczyciele i rodzice powinni zadbać o to, aby rozwiązywanie zadań przebiegało w atmosferze zabawy i pozytywnego wyzwania, a nie rywalizacji nastawionej wyłącznie na prawidłowym wyniku. Błędy popełniane przez dzieci powinny być traktowane jako punkt wyjścia do rozmów na temat tego, co doprowadziło dziecko do takiego rozwiązania. Jeśli nauczyciel lub rodzic rozumie co determinuje błędną odpowiedź dziecka, może podjąć odpowiednie działania mające na celu doprowadzenie go do samodzielnego zrozumienia, że jego tok rozumowania jest błędny.

Dzieci często łączą popełnianie błędów z negatywnymi konsekwencjami, jakie ich w związku z tym czekają: zła ocena, niezadowolenie nauczyciela lub rodzica, bycie wyśmianym przez rówieśników, którzy dobrze poradzi sobie z zadaniem. Wśród wymienianych przez dzieci uzasadnień własnych obaw pojawiały się również takie, że błędy i złe oceny mogą prowadzić do braku awansu do kolejnej klasy. W związku z powyższym ważne jest, aby dzieci w atmosferze zaufania i wzajemnej akceptacji otrzymywały odpowiednią informację zwrotną na temat poziomu wykonania zadania oraz uzyskały możliwość poprawy wtedy, gdy jej oczekują.

Podkreślenie znaczenia procesu uczenia się, a nie jego wyniku, może zminimalizować negatywne odczucia uczniów wobec matematyki. Dzieci szczególnie boją się zadań „trudnych” czyli takich, które przewyższają ich obecne możliwości lub wymagają podjęcia wysiłku oraz poświęcenia czasu na ich rozwiązanie. Czas w uczeniu się matematyki jest ważną kwestią, na brak którego dzieci często narzekały.

Zgodnie z wynikami klasycznych oraz najnowszych badań, lęk (w tym lęk przed matematyką) prowadzi do ograniczenia zasobów pamięci

roboczej, a to z kolei do słabego wykonania zadań poznawczych (Justicia-Galiano, Martín-Puga, Linares, Pelegrina, 2017). Dzieci uczęszczające do pierwszej klasy szkoły podstawowej różnią się między sobą w zakresie wiedzy i umiejętności matematycznych z powodu wcześniejszych doświadczeń w uczeniu się matematyki w domu lub przedszkolu, co determinuje ilość czasu, którego potrzebują na udzielenie odpowiedzi.

Dzieci rozpoczynające naukę matematyki muszą zapamiętać wiele faktów matematycznych, a jeśli oczekuje się od nich szybkiego przypomnienia sobie wyniku dodawania czy odejmowania, mogą przejawiać w tym względzie pewne trudności. Presja czasu towarzyszy dzieciom nie tylko na lekcji, ale również w domu. Wypowiedzi dzieci sugerują, że jeśli mają one dużo pracy domowej, to denerwują się tym, że mogą nie zdążyć z jej wykonaniem i otrzymają złą ocenę. Wobec tego warto zasugerować, aby dzieci otrzymywały tyle czasu na rozwiązanie zadań, ile potrzebują. To na nauczycielach ciąży odpowiedzialność za to, aby powierzyć uczniom odpowiednią liczbę zadań – aby nawet ci pracujący wolno również mieli szansę na ich rozwiązanie. Uczniowie czasami chcą poprawić swoje odpowiedzi, gdy zaobserwują błąd. Jeśli nie mają na to wystarczającej ilości czasu, są oceniani nie za brak wiedzy, ale za nienadążanie w czasie.

Rolą nauczyciela jest przekazywanie informacji zwrotnej na temat tego, co zostało przez ucznia już opanowane oraz dostarczanie wskazówek dotyczących tego, co należy jeszcze poprawić. Nawet małe sukcesy dzieci powinny być doceniane, ponieważ dzieci, które mają niską samoocenę w zakresie matematyki w porównaniu do tych o wyższej samoocenie, mają niższy poziom lęku przed matematyką i lepsze osiągnięcia matematyczne (Ganley, McGraw, 2016).

Uczenie się matematyki odbywa się nie tylko w ramach formalnej edukacji szkolnej. Zgodnie z wynikami badań Boonen, Kolkman, Kroesbergen (2011), ilość oraz jakość rozmów „matematycznych” w domu prowadzi do

rozwoju umiejętności matematycznych dzieci, a dobre wyniki uzyskiwane z matematyki w konsekwencji ograniczają poziom negatywnych emocji związanych z uczeniem się tego przedmiotu. Badacze wskazują, że dzieci, których rodzice inicjują rozmowy wymagające wspólnego liczenia widocznych obiektów, opisywania kształtów, dodawania i odejmowania w pamięci, lepiej sobie radzą w późniejszym czasie z matematyką niż dzieci, których rodzice nie podejmują takich działań.

Inni badacze wskazują na znaczenie wykorzystania w domu lub podczas lekcji gier i zabaw matematycznych oraz korzystania z aplikacji pozwalających na uczenie się matematyki (Berkowitz, Schaeffer, Maloney, Peterson, Gregor, Levine, Beilock, 2015). Badacze sugerują, że korzystanie przez rodziców z gotowych narzędzi wiąże się z dostarczeniem adekwatnej pomocy dzieciom w nauce matematyki nawet wtedy, gdy rodzice nie mają wystarczających umiejętności matematycznych czy dydaktycznych, aby wspierać rozwój umiejętności dzieci.

Finansowanie: Praca powstała w wyniku realizacji projektu badawczego nr 2015/19/N/HS6/00791 finansowanego ze środków Narodowego Centrum Nauki.

Słowa kluczowe: lęk przed matematyką, powody lęku przed matematyką, lęk ogólny, wiek wczesnoszkolny.

Przypisy:

¹ Badanie longitudinalne realizowane w krakowskich szkołach podstawowych dotyczy mechanizmu powstawania i rozwoju lęku przed matematyką dzieci w wieku wczesnoszkolnym.

Bibliografia:

- Berkowitz T., Schaeffer M. W., Maloney E. A., Peterson L., Gregor C., Levine S. C., Beilock S. L.: *Math at home adds up to achievement in school*. "Science" 2015, 350(6257).
- Dowker A., Sarkar A., Looi C. Y.: *Mathematics anxiety: What have we learned in 60 years?*. "Frontiers in Psychology", 2016, 7(508).
- Ganley C. M., McGraw A. L.: *The*

development and validation of a Revised Version of the Math Anxiety Scale for Young Children. "Frontiers in Psychology" 2016, 7(1181).

- Hembree R.: *The nature, effects, and relief of mathematics anxiety*. "Journal for Research in Mathematics Education" 1990, 21(1).
- Jamieson J. P., Mendes W. B., Nock M. K.: *Improving acute stress responses: The power of reappraisal*. "Current Directions in Psychological Science" 2013, 22(1).
- Justicia-Galiano M. J., Martín-Puga M.

E., Linares R., Pelegrina S.: *Math anxiety and math performance in children: The mediating roles of working memory and math self-concept*. "The British Journal of Educational Psychology" 2017, 87(4).

- Ramirez G., Gunderson E. A., Levine S. C., Beilock S. L.: *Math anxiety, working memory, and math achievement in early elementary school*. "Journal of Cognition and Development" 2013, 14(2).
- Vukovic R. K., Kieffer M. J., Bailey S. P., Harari R. R.: *Mathematics anxiety in young children: Concurrent and*

longitudinal associations with mathematical performance. "Contemporary Educational Psychology", 2013, 38.



Dr Monika Szczygieł – psycholog, pedagog, adiunkt w Instytucie Psychologii Uniwersytetu Pedagogicznego im. KEN w Krakowie, realizuje badania dotyczące uwarunkowań osiągnięć matematycznych wśród dzieci

Tajemnice tangramu. Przykłady wykorzystania tangramu w kształceniu matematycznych umiejętności uczniów szkoły podstawowej

Dorota Długosz

Nauczyciel matematyki musi przekonać uczniów o przydatności i atrakcyjności wiedzy. Tangram doskonale służy realizacji tego celu.

Tangram jest chińską łamigłówką, znaną od ok. 3000 lat. Składa się z siedmiu elementów w postaci figur geometrycznych zwanych tanami, powstałych przez rozcięcie kwadratu. Są nimi: 2 przystające duże trójkąty prostokątne, 1 średni trójkąt prostokątny, 2 przystające małe trójkąty prostokątne, 1 mały kwadrat, 1 mały równoległobok (źródło: <https://pl.wikipedia.org/wiki/Tangram>).



Rys. 1. Fot. autora

W nauczaniu początkowym poznanie pojęć geometrycznych odbywa się często w drodze zabaw, by w dalszym

etapie nauki wykorzystać te doświadczenia. Wielu nauczycieli pierwszego etapu edukacyjnego pracuje z tangramem. Spotkałam się z opinią nauczycieli matematyki, że „nie będą bawić się z uczniami na lekcjach matematyki, bo przecież jest egzamin”. Jest wiele sytuacji szkolnych, czy to na lekcjach matematyki lub na zastępstwie, gdy można wykorzystać tangram. W swojej szkolnej praktyce wielokrotnie usłyszałam od uczniów, gdy wchodziłam na zastępstwo: „Ale nie będzie matematyki?”. Był tangram.

W nauczaniu matematyki w szkole podstawowej tematy dotyczące miary i mierzenia figur sprawiają uczniom trudności. Zadania z tego zakresu są zawsze na egzaminie z matematyki w szkole podstawowej. Tangram jest skutecznym narzędziem, który możemy wykorzystać do kształtowania wyobraźni na płaszczyźnie, do kształtowania pojęcia pola wielokąta na każdym etapie edukacji.

Pojęcie pola w nauczaniu matematyki w szkole podstawowej powinno być kształtowane w sposób intuicyjny. Uczniowie poznają wzory na obliczanie pól powierzchni trójkątów i czworokątów, stosując je w różnorodnych zadaniach. Dużą trudność sprawia im obliczanie pola powierzchni wielokątów wypukłych o pięciu lub większej liczbie wierzchołków, lub czworokąta, którego nie umieją nazwać, bo nie jest „nawet” trapezem. Często uczniowie odpowiadają, że nie znają wzoru na pole takiego wielokąta. Wiedza uczniów powinna mieć charakter operacyjny. Schematyzacja myślenia może być pomocna, ale nas ogranicza.

Warto poświęcić kilka lekcji matematyki w ciągu roku na rozwiązywanie tangramowych zadań. Pozwoli to naszym uczniom na przeżycie przygody w świecie geometrii, jednocześnie wyzwoli ich ciekawość i zainteresowanie. Uczenie się przy pomocy zabawy wzbudza motywację do wykonywania

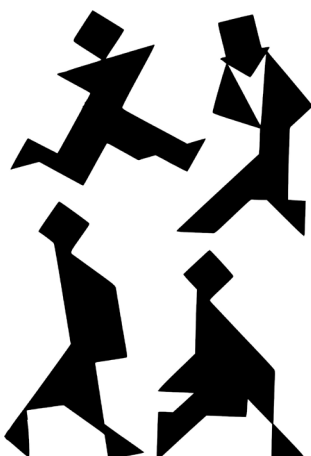
zadań szkolnych i wpływa na rozwijanie twórczych postaw poznawczych, nie tylko w nauczaniu początkowym. Wycinanie, zaginanie, rysowanie i manipulowanie modelami figur geometrycznych przyczynia się do kształtowania u uczniów pojęć geometrycznych takich jak: figury przystające, pola figur przystających lub długości odpowiednich boków w figurach podobnych i pojęcie figur podobnych. Tangram jest rzadko wykorzystywany w kształtowaniu liczby wymiernej i niewymiernej.

Podaję kilka propozycji, jak skorzystać z tego prostego narzędzia, jakim jest tangram.

W klasach początkowych można zaprosić uczniów do zadań, w których wypełniają przygotowane schematy elementami tangramu w skali 1:1, później można przygotować np. na tablicy wybrane układanki do odwzorowania. Oczywiście są już w Internecie na platformach, gdzie można rozwiązywać zagadki na monitorze komputera.



Rys. 2. Źródło: Z. Nowak, *Pentomina i tangramy*, Warszawa 1972, s. 95.



Rys. 3. Źródło: Z. Nowak, *Pentomina i tangramy*, Warszawa 1972, s. 108.

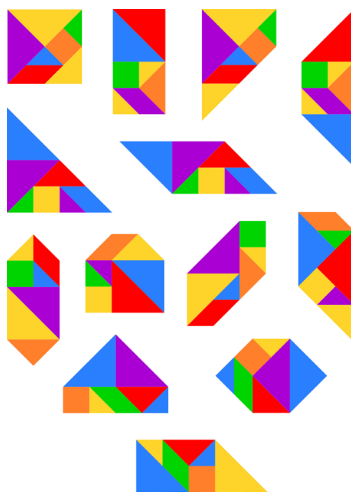
Przypomnijmy zasady układania modeli tangramowych:

- do ułożenia każdej figury należy wykorzystać wszystkie części składowe tangramu;

- elementy tangramu muszą się stykać z sobą bokami lub wierzchołkami;
- części nie mogą się nakładać na siebie: wszystkie części tangramu muszą być widoczne;
- poszczególne części tangramu mogą być odwracane na drugą stronę.

W klasach starszych układanki tangramowe mogą posłużyć jako rozgrzewka przed zasadniczym tematem lekcji. Nie chowajmy tangramu głęboko do szuflady, bo świetnym zadaniem jest odpowiedź na pytanie: *Ile wielokątów wypukłych możemy ułożyć ze wszystkich elementów tangramu?*

Oto galeria trzynastu wielokątów wypukłych, które można zbudować za pomocą tangramu:

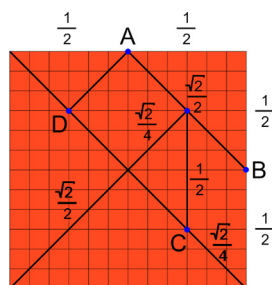


Rys. 4. Oprac. D. Długosz, P. Krawczyk

Kolejne pytanie, które jest interesujące, to: *Ile najwięcej kątów może mieć wielokąt wypukły, który utworzymy z tangramu siedmioczęściowego?*

Po ułożeniu wszystkich możliwych wielokątów można, po poznaniu przez uczniów twierdzenia Pitagorasa, postawić następujące pytania:

1. *Jakie długości mają odcinki w tangramie?* Dla ułatwienia kwadrat wyjściowy ma bok długości 1.



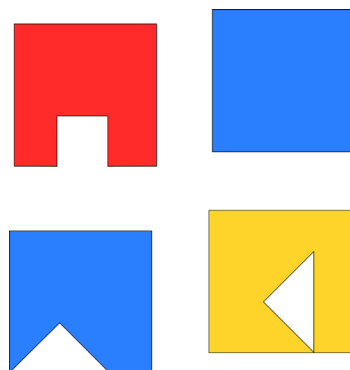
Rys. 5. Źródło: A. Wierzbic, *Papierowe dinozaury. Tangramy*, Bielsko-Biała 2000, s. 30.

2. *Który z tych wielokątów ma największy obwód, a który najmniejszy?*

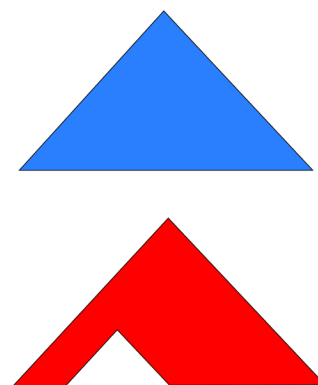
Jest to dogodna okazja do kształtowania pojęcia liczby niewymiernej, bo uczeń zobaczy odcinki o długości $\sqrt{2}$. Należy pokusić się o wskazanie odcinków o długościach będących liczbami niewymiernymi i porównać z długością odcinków, które mają długości będące liczbami wymiernymi. W sposób doświadczalny można pozwolić uczniom na odkrycie, że $1 < \sqrt{2} < 1,5$. Jednocześnie dajemy okazję do wykonania działań na liczbach niewymiernych i porównywania ich. Wielokąt o najmniejszym obwodzie to jedyny wielokąt foremny w tym zestawie: kwadrat, a największy obwód ma...

Postawienie pytania: *Jakie są pola otrzymanych wielokątów?* jest dobrym żartem matematycznym. Pozwoli nam sprawdzić, którzy uczniowie uważali na lekcjach dotyczących pola wielokąta.

Bardzo dużą popularnością cieszą się paradoksy tangramowe. Można ułożyć kwadraty bądź trójkąty z dziurą i bez niej lub inne zabawne kształty.

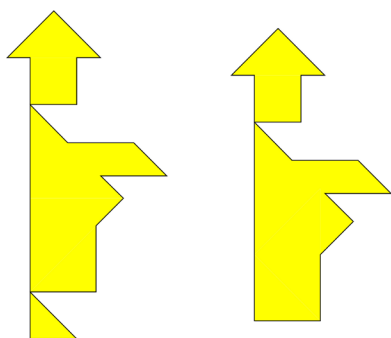


Rys. 6. Źródło: A. Wierzbic, *Papierowe dinozaury. Tangramy*, Bielsko-Biała 2000, s. 40.



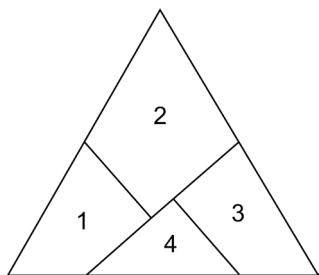
Rys. 7. Źródło: A. Wierzbic, *Papierowe dinozaury. Tangramy*, Bielsko-Biała 2000, s. 37.

Ciekawym zadaniem z serii paradoksów jest zagadka Dudeneya:



Rys. 8. Źródło: A. Wierzbic, *Papierowe dinozaury. Tangramy*, Bielsko-Biała 2000, s. 36.

Henry Ernest Dudeney (1857–1930) jest autorem wielu zagadek i ciekawych zadań. Jednym z nich jest rozcinanie trójkąta równobocznego na kwadrat.



Rys. 9. Źródło: M. Powązka, Z. Powązka, D. Długosz, G. Stanecka, *Geometryczne przygody*, Bielsko-Biała 2001, s. 96.

Sposób rozcięcia jest opisany np. na stronie www.matma4u.pl.

Jak ułożyć z tych puzzli kwadrat? Każdej figurze przyporządkowano liczbę. Należy tak przestawić elementy układanki, by liczby układały się rosnąco w kierunku przeciwnym do danego. Do czego się to może przydać? Do kształtowania pojęcia pola figury, a w dalszym kursie matematyki do pojęcia figur równoważnych i do twierdzenia Bolyaia–Gerwiena: *Dwa wielokąty są równoważne przez pocięcie wtedy i tylko wtedy, gdy mają to samo pole*. Powyższe zadanie jest ilustracją, która pozwoli pokazać, że są różne kształty, a pole jest takie samo.

Na poziomie szkoły podstawowej nauka o polach figur powinna zaczynać się od intuicyjnego porównywania wielkości obszarów, badania równości pól przez dzielenie figury na części i układania z nich innych figur o tym samym polu. Tangram jest przydatnym narzędziem do zbudowania intuicji w tym obszarze.

Słowa kluczowe: tangram.

Bibliografia:

- Czaplinska J.: *Od tangramu do twierdzenia Bolyaia–Gerwiena*. „Nauczyciele

i Matematyka”, nr 49/2004.

- Jeleński S.: *Lilavati. Rozgrywki matematyczne*. Warszawa 1992.
- Kąkol H., Powązka Z., Treliński G.: *Przewodnik metodyczny 7, 8. Błękitna MATEMATYKA*. Bielsko-Biała: Wydawnictwo Kleks, 1997.
- Nowak Z.: *Pentomina i tangramy*, Warszawa: Wydawnictwo Horyzonty, 1972.
- Powązka M., Powązka Z., Długosz D., Stanecka G.: *Trzeci stopień wtajemniczenia, cz. II. Geometryczne przygody*. Bielsko-Biała: Wydawnictwo Kleks, 2001.
- Wierzbic A.: *Papierowe dinozaury. Tangramy*. Bielsko-Biała: Wydawnictwo Kleks, 2000.

Netografia:

- <https://pl.wikipedia.org/wiki/Tangram> (dostęp: 5 II 2020).
- www.matma4u.pl (dostęp: 5 II 2020).

Ilustracje opracował graficznie Patryk Krawczyk – nauczyciel informatyki, MCDN Ośrodek w Oświęcimiu.



Dorota Długosz – nauczyciel matematyki z 36-letnim stażem pedagogicznym. Była doradcą metodycznym, obecnie pracuje w MCDN Ośrodek w Oświęcimiu.

Kształtowanie wybranych kompetencji kluczowych w nauczaniu matematyki

dr Joanna Major
dr Maciej Major

Jedynym z gwarantów wszechstronnego wykształcenia matematycznego uczniów jest rozwiązywanie przez nich różnorodnych zadań matematycznych.

Pojęcie kompetencji kluczowych scharakteryzowane zostało w zaleceniach Rady Unii Europejskiej. Ustanowiono tam osiem kompetencji kluczowych. W dokumencie wskazano: kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji; kompetencje w zakresie wielojęzyczności; kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii

i inżynierii; kompetencje cyfrowe; kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się; kompetencje obywatelskie; kompetencje w zakresie przedsiębiorczości; kompetencje w zakresie świadomości i ekspresji kulturalnej (2018). Większość z nich ma odpowiedniki w obojętnych w Polsce podstawach programowych dla poszczególnych etapów kształcenia.

Omawiane tu kompetencje kluczowe są połączeniem wiedzy, umiejętności i postaw odpowiednich do sytuacji, a ich posiadanie jest ważne dla każdego z nas. Kompetencje matematyczne obejmują umiejętność wykorzystywania myślenia matematycznego w celu rozwiązywania problemów, w tym wynikających z zagadnień życia codziennego. Podstawę dla prowadzenia rozumowań bazujących



Fot. M. Grewenda

na pojęciach matematycznych stanowi elementarna umiejętność liczenia. Do zasobu wiedzy, umiejętności i postaw niezbędnych z punktu widzenia uczestnictwa w życiu społecznym obok kompetencji matematycznych należą również kompetencje językowe, a wśród nich znajomość funkcji języka i głównych cech różnych stylów oraz umiejętności posługiwania się różnego typu tekstami.

Język matematyczny – w którym w uproszczeniu można wyróżnić trzy komponenty: „język literacki”, „język formuł arytmetycznych, algebraicznych i zdań logicznych z kwantifikatorami” oraz „język schematów graficznych” – cechuje się abstrakcyjnym charakterem, różnorodnymi składnikami (terminologią i symboliką matematyczną), nie ma zaś środków ekspresji, jest on również praktycznie niezmienny w czasie. Te cechy powodują, że język i teksty o charakterze matematycznym posiadają swoją specyfikę (Samsel-Opalla, 2010).

Wprowadzanie uczniów w lekturę testów, w tym tekstów matematycznych, trwa od początku edukacji szkolnej. Już w podstawie programowej dla I etapu edukacyjnego wśród celów kształcenia – wymagań ogólnych wskazano, że w zakresie poznawczego obszaru rozwoju (pkt. IV) uczeń osiąga *umiejętność czytania prostych tekstów matematycznych, np. zadań tekstowych, łamigłówek i zagadek, symboli* (pkt. 7). Podobnie w podstawie programowej z matematyki dla klas IV–VIII wśród celów kształcenia, tj. wymagań ogólnych wskazano,

że w zakresie wykorzystania i tworzenia informacji (pkt. II) niezbędnym jest: *1. odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych w różnej formie oraz ich przetwarzanie; 2. interpretowanie i tworzenie tekstów o charakterze matematycznym oraz graficzne przedstawianie danych. Z przytoczonego zapisu wynika, że ważna jest nie tylko umiejętność czytania tekstu, ale też m.in. kompetencje związane z pozyskiwaniem, analizą i przetwarzaniem matematycznych treści prezentowanych w innej formie niż „literacka”.*

Jednocześnie wyniki różnorodnych badań ujawniają, iż uczący się mają trudności z czytaniem i analizą tekstu, a zwłaszcza tekstu o profilu matematycznym (zob. Dąbrowa, 2001; Konior, 2002a, 2002b). Jedną z przyczyn tego stanu rzeczy jest to, że „tekst matematyczny – w przeciwieństwie do tekstów spotykanych na co dzień – składa się na przemian z fragmentów zapisanych symbolicznie i słownie. Fakt ten nie pozostaje bez wpływu na jego odbiór; słowno-symboliczna budowa może mieć poważne konsekwencje dla przebiegu lektury” (Samsel-Opalla, 2010).

Jednocześnie od wielu lat podejmowane są próby odpowiedzi na pytanie o najbardziej efektywny sposób nauczania/uczenia się matematyki. Są to jedne z problemów współczesnej dydaktyki, zwłaszcza w kontekście zachodzących przemian technologicznych, społecznych, kulturowych czy ekonomicznych (Raport..., 2013). W praktyce proces nauczania/uczenia się matematyki jest złożony

i interdyscyplinarny. Można w nim, w pewnym uproszczeniu, wyróżnić następujące komponenty: kształtowanie pojęć matematycznych, rozwiązywanie zadań, prowadzenie rozumowań matematycznych, kształtowanie języka matematycznego (Major, Olik-Pawlik, Ratusiński, Zaręba, 2016).

Faktem jest, że rozwiązywanie odpowiednio dobranych zadań jest kluczowym komponentem procesu nauczania/uczenia się na każdym poziomie edukacji. G. Polya stwierdził, że rozwiązywanie zadań stanowi jedną ze specyficznych własności intelektu, a intelekt to specyficzny rys gatunku ludzkiego. Rozwiązywanie zadań można więc uznać za najbardziej charakterystyczną domenę aktywności człowieka (Polya, 1990). Problematyka metodyczna zadań matematycznych jest bardzo ważna. Stawianie właściwych pytań oraz proponowanie uczącym się odpowiednio dobranych zadań matematycznych odgrywa kluczową rolę w procesie nauczania – uczenia się, bowiem celem nauczania matematyki jest nie tylko poznawanie przez uczniów treści określonych programem nauczania, ale przede wszystkim kształtowanie właściwej postawy intelektualnej uczącego się. Jak pisze Z. Krygowska, „chcemy bowiem uczyć dziś nie tylko matematyki, chcemy kształcić poprzez matematykę” (1977).

Obok zadań ćwiczeń i zadań zwykłych zastosowań teorii (por. Krygowska, 1977), które stanowią podstawowy budulec dla lekcji matematyki, kształcąc podstawowe kompetencje, warto proponować uczniom m.in. zadania

o mniej typowej strukturze. Zadań, które sprzyjałyby zadumie nad ich treścią, a „przestrzegają” przed pośpiesznym wykonywaniem rachunków i udzielaniem odpowiedzi na postawione w ich treści pytanie.

Najcenniejsze zadania to te, które głęboko penetrują strukturę wiedzy matematycznej, ujawniając i wykorzystując jej naturalne powiązania i zależności, zmuszając do głębokiej analizy szeroko pojętej kompozycji zadania. Do takich zadań zaliczyć można m.in. zadania problemowe, zadania z deficytem albo nadmiarem danych, zadania matematyczne niespodzianki, zadanie niezawierające pytania oraz zadania na dowodzenie, to one pozwalają kształtować kompetencje kluczowe uczących się.

W dalszej części artykułu pokażemy przykłady kilku różnych typów zadań z poziomu szkoły podstawowej.

Przykład 1. Zadania z deficytem albo nadmiarem danych.

1. Oblicz objętość sześcianu, w którym przekątna ściany bocznej ma długość $3\sqrt{2}$ cm, a pole podstawy jest równe 9 cm^2 .
2. Mateusz ma 21 lat. Jego mama jest starsza od taty o rok. Tata Mateusza jest od niego starszy o 25 lat. Ile lat ma tata Mateusza teraz, a ile będzie miał za rok?
3. W trójkącie o bokach 3 cm, 4 cm, 5 cm najkrótsza wysokość ma 2 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

Zadania 1. i 2. są zadaniami z nadmiarem niesprzecznych danych. W przypadku pracy nad tego typu zadaniami kształtujące jest zarówno udzielanie odpowiedzi na postawione w zadaniach pytanie, a przede wszystkim podejmowanie refleksji nad ich treścią, analiza danych oraz wskazywanie tych, które można uznać za zbędne. Zadanie 3. zawiera sprzeczne dane. Istota pracy uczniów polega tu na wskazaniu sprzeczności pomiędzy nimi.

4. Wyznacz obwód prostokąta o polu 18 cm^2 , w którym długości boków są liczbami naturalnymi.
5. Ania pomyślała pewną nieparzystą dwucyfrową liczbę, suma cyfr tej liczby jest równa 12. O jakiej liczbie myślała Ania?

Rozwiązanie zadań 4. oraz 5. wymaga rozważenia wszystkich możliwych przypadków. Obok wskazywania wszystkich możliwości kształtująca jest również dyskusja dotycząca podania dodatkowych warunków dla zadań, przy których odpowiedź będzie jednoznaczna.

Rozwiązanie zadań podobnych do zadań 1–5. nie jest łatwe i wymaga zarówno od uczniów, jak i od nauczyciela porzucenia pewnych utartych schematów myślenia i postępowania. Jak wskazuje S. Turnau, „rozwiązanie podobnych zadań uczy krytycznego stosunku do danych w zadaniu, wyrabia nawyk ich analizowania przed przystąpieniem do szukania odpowiedzi, przeciwdziała pośpieszemu, schematycznemu dobieraniu działań prowadzących do jednoznacznej odpowiedzi” (Turnau, 1990).

Przykład 2. Zadania niezawierające pytania.

6. Zuzia w sklepie papierniczym kupiła pióro za 7 zł oraz dwa długopisy po 4 zł, zaś Amelka trzy zeszyty po 8 zł każdy.

Zadanie 6. jest niestandardowe, bowiem w jego treści nie zawarto pytania. Praca uczniów może polegać tu na układaniu pytań i zapisywaniu rozwiązań skomponowanych zadań. W dalszym etapie można modyfikować zadanie bazowe i dla niego układać kolejne serie pytań. Chęć układania coraz to nowych pytań do zadania niejako zmusza ucznia do refleksji nad znaczeniem poszczególnych danych liczbowych oraz wyszukiwaniem kolejnych związków między nimi. W istocie jest to analiza i komponowanie tekstu o charakterze matematycznym.

Przykład 3. Zadania wymagające „dowodzenia”.

7. Czy kasjer może wydać 20 zł siedmioma monetami o nominałach 1 zł oraz 5 zł?
8. Piotr kupił w sklepie papierniczym 4 zeszyty, dwa bloki rysunkowe, długopis za 4 zł 20 gr i pewną liczbę ołówków po 1 zł 14 gr. Sprzedawca wystawił mu rachunek za te towary na sumę 18 zł 65 gr. Piotr twierdzi, że sprzedawca się pomylił. Czy

Piotr ma rację? Odpowiedź uzasadnij (Bobiński, ..., 2000).

Zadania 7. oraz 8. wprowadzają uczniów w metodę matematyczną, w istocie ich rozwiązanie polega na dowodzeniu. Dowód może mieć charakter ogólnego rozumowania bądź może on polegać na wyczerpaniu wszystkich przypadków (w zadaniu 8. jest to czasochłonne). Z naszych doświadczeń wynika, że zadanie 8. często uznawane jest przez uczniów za takie, którego nie da się rozwiązać ze względu na deficyt danych. Jednak dokładna analiza treści zadania pozwala uczniom uświadomić sobie, na jakie pytanie mamy odpowiedzieć, oraz pozwala uzasadnić (bazując na pojęciu parzystości), że istotnie Piotr ma rację.

Przykład 4. Seria zadań z takimi samymi liczbami.

9. 147 szklanych kulek rozdzielamy po równo między 12 osób. Ile takich kulek dostanie każda z nich? Ile kulek zostanie?
10. Bilet do kina kosztuje 12 zł. Ile biletów do kina możemy kupić za 147 zł?
11. W mikrobusie mieści się 12 osób. Ile co najmniej takich pojazdów potrzeba, aby przewieźć 147 pasażerów? (zob. Braun, ..., 2019)

Zadania 9–11. są podobne w warstwie matematycznej. Rozwiązując je, wykonujemy dzielenie $147:12$. Jednocześnie w warstwie fabuły zadania te są istotnie różne. Każdorazowo należy odpowiednio zinterpretować (w kontekście treści zadania) otrzymany na gruncie matematycznym wynik liczbowy.

Przykład 5. Zadania niewymagające wykonywania obliczeń.

12. Krzysztof jest o 12 lat starszy od Moniki. O ile będzie od niej starszy za 10 lat?
13. Pani Anita ma w kuchennej szafce 18 łyżek do zupy, 19 łyżeczek, 20 widelców i 17 noży. Dla ilu osób może podać obiad z deserem tak, aby każda miała komplet sztućców? (Łuczak, 2018).

Praca nad zadaniami 12. i 13. ogranicza się do analizy ich treści i wyciągnięcia stosownych wniosków. W książce G. Poly *Jak to rozwiązać?* autor wskazuje

cztery główne fazy (etapy) pracy nad rozwiązaniem zadania:

- I. Zrozumienie zadania.
- II. Układanie planu rozwiązania.
- III. Wykonanie planu.
- IV. Rzut oka wstecz (1990).

Praca nad zadaniami podobnymi do zaprezentowanych w powyższych przykładach pozwala wyeksponować etapy I, II oraz IV, co może przyczynić się do kształtowania kompetencji kluczowych uczących się.

Podsumowując, warto też zaznaczyć, iż jedynym z gwarantów wszechstronnego wykształcenia matematycznego uczniów jest rozwiązywanie przez nich różnorodnych zadań matematycznych. Dzięki bogactwu doświadczeń uczniowie mogą osiągnąć kompetencje kluczowe istotne w ich dalszym życiu.

Słowa kluczowe: edukacja matematyczna, kompetencje kluczowe, zadania matematyczne.

Bibliografia:

- Bobiński Z., Ciszewska M., Jarek P., Kamiński B., Kourliandtchik L., Mentzen M.: *Miniatury matematyczne 04 Grafy, parzystość...* Toruń: Wydawnictwo Aksjomat, 2000.
- Braun M., Mańkowska A., Paszyńska

M.: *Matematyka z kluczem. Podręcznik klasa 6, cz. 1.* Warszawa: Nowa Era, 2019.

- Dąbrowa M.: *Specyfika tekstu matematycznego i jego lektury.* Tarnów: Zeszyty Naukowe Małopolskiej Wyższej Szkoły w Tarnowie nr 18/2001.
- Dziennik Urzędowy Unii Europejskiej. *Zalecenie Rady z dnia 22 maja 2018 r. w sprawie kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie,* 2018/C 189/01, 2018.
- Konior J.: *Specyfika tekstów matematycznych w procesie ich lektury,* [w:] *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki. Tom IV. Prace prof. dr hab. Jana Koniora.* Płock 2002.
- Konior J.: *Tekst matematyczny i jego lektura. Nauka czytania tekstów matematycznych w szkole,* [w:] *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki. Tom IV. Prace prof. dr hab. Jana Koniora.* Płock, 2002.
- Krygowska Z.: *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 3.* Warszawa: WSiP, 1977.
- Łuczak A., Murdzek A.: *Matematyka z plusem podręcznik klasa 4.* Gdańsk: GWO, 2018.
- Major J., Olik-Pawlik B., Ratusiński T., Zaręba L.: *Wybrane uwagi na temat roli zadań matematycznych w procesie nauczania-uczenia się matematyki.*

„Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia” VIII, 2016.

- Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej. Dz.U. 2017 poz. 356, 2017.
- Polya G.: *Jak to rozwiązać?* Warszawa: PWN, 1990.
- Raport o stanie edukacji. Warszawa: Instytut Badań Edukacyjnych, 2013.
- Samsel-Opalla J.: *Porównanie roli komponentów tekstu matematycznego w ocenie studentów I i III roku matematyki.* „Nauczyciel i Szkoła” nr 1–2 (46–47), 2010.
- Turnau S.: *Wykłady o nauczaniu matematyki.* Warszawa: PWN, 1990.



Joanna Major jest doktorem nauk matematycznych, nauczycielem matematyki w Szkole Podstawowej im. Królowej Jadwigi w Sierczy.



Maciej Major jest doktorem nauk matematycznych, nauczycielem matematyki w Szkole Podstawowej im. s. Emilii Podoskiej w Grajewie.

Kształtowanie kompetencji miękkich na lekcjach matematyki w szkole podstawowej

Małgorzata Iwanowska
Beata Wąsowska-Narojczyk

„Pracę otrzymuje się w 70% dzięki wiedzy fachowej i w 30% dzięki zdolnościom społecznym. Traci się ją zaś w 70% z braku zdolności społecznych i w 30% z braku kwalifikacji merytorycznych” (studentway.pl).

Kompetencje twarde i miękkie

Ucząc w szkole, stawiamy sobie dwa fundamentalne pytania: Czego uczyć uczniów? W jaki sposób uczyć? Odpowiedź na te pytania uzależniona jest od określenia potrzeb dziecka, młodego człowieka, a w końcu osoby dorosłej w jej życiu osobistym i zawodowym. Albert

Camus powiedział, że „szkoła przygotowuje dzieci do życia w świecie, który nie istnieje”. Czy wprowadzane zmiany w systemie oświaty dorównują szybkością przemianom, jakie dokonują się w świecie? Ilość nowej wiedzy podwaja się co dwa lata.

Informacje docierają do odbiorców przez różnorodne media. Ludzie narażeni są zarówno na nadmiar informacji, jak i na nadmiar środków ich

pozyskiwania. A zdolność przyswajania informacji przez człowieka nie nadąża za tymi zjawiskami.

Kiedy poruszamy temat kształcenia, mamy na myśli obecnie rozwijanie kompetencji twardych i kompetencji miękkich. Kompetencje twarde to konkretne umiejętności i wiedza potrzebne do wykonywania konkretnej pracy. Posiadanie określonych twardych kompetencji możemy

wykazać przez świadectwo, dyplom, zaświadczenie o udziale w konkursie, egzaminie lub rozmowie kwalifikacyjnej. Kompetencje miękkie związane są z psychiką, cechami osobowości oraz umiejętnościami społecznymi. Posiadanie umiejętności miękkich jest trudniejsze do udowodnienia – wymaga stworzenia sytuacji, realnej lub symulowanej, w której można się nimi wykazać.

Umiejętności miękkie dotyczą umiejętności osobistych (np. planowanie i organizowanie własnej pracy, kształcenie ustawiczne, panowanie nad stresem) lub umiejętności interpersonalnych (np. umiejętność współpracy w zespole, rozwiązywania problemów, elastyczność jako zdolność do dostosowania się). Kształtowanie kompetencji twardych na lekcjach matematyki polega na rozwijaniu wiedzy i umiejętności matematycznych, a stosowanie metod aktywizujących pozwala na rozwój kompetencji miękkich.

Obecnie uważa się, że kompetencje miękkie mają takie same, a może nawet większe znaczenie jak te twarde. Dlatego doradcy zawodowi twierdzą, że pracę otrzymuje się w 70% dzięki wiedzy fachowej (kompetencje twarde) i w 30% dzięki zdolnościom społecznym (kompetencje miękkie). Traci się ją zaś w 70% z braku zdolności społecznych i w 30% z braku kwalifikacji merytorycznych.

Pytania badawcze

- W jakim stopniu uczniowie wykorzystują i rozwijają kompetencje miękkie na lekcjach matematyki?
- W połączeniu z jaką umiejętnością matematyczną/metodą pracy występuje kształtowanie badanej kompetencji miękkiej?

Grupa badawcza

Grupa badawcza do pierwszego pytania obejmowała nauczycieli uczestniczących w sprawdzianie umiejętności matematycznych dla uczniów klas czwartych „Matematyka na starcie drugiego etapu kształcenia”, który odbył się 13 września 2018 roku. Do sprawdzianu przystąpiło 6 567 uczniów z warszawskich szkół podstawowych i uczestniczyli w nim nauczyciele 253

klas czwartych. Sprawdzian badał kompetencje twarde z matematyki uczniów. Nauczyciele oceniali w ankiecie stopień wykształcenia i wykorzystania przez uczniów na lekcjach matematyki kompetencji miękkich. Grupa badawcza do drugiego pytania składała się z trzech 10-osobowych grup nauczycieli matematyki w szkole podstawowej. Jedną grupę stanowili nauczyciele z niewielkich miejscowości województwa mazowieckiego, dwie grupy to nauczyciele z Warszawy. Zastosowanym narzędziem badawczym był kwestionariusz wywiadu.

Omówienie wyników badań

Pytanie badawcze: W jakim stopniu uczniowie wykorzystują i rozwijają kompetencje miękkie na lekcjach matematyki?

Nauczyciele oceniali w skali od 1 (0%) do 6 (100%) stopień opanowania i wykorzystywania na lekcjach matematyki następujących kompetencji miękkich:

1. zdolność do efektywnej komunikacji,
2. umiejętność współpracy w zespole,
3. przedsiębiorczość,
4. elastyczność jako zdolność do dostosowania się,
5. efektywność w działaniu,
6. niezależność,
7. rozwiązywanie problemów,
8. planowanie i organizowanie własnej pracy,
9. kształcenie ustawiczne,
10. panowanie nad stresem.

Zdaniem nauczycieli uczniowie dobrze sobie radzą (69%) z wykorzystywaniem kompetencji miękkich na lekcjach matematyki. Z uwagi na stopień wykształcenia u uczniów kompetencji podzielono je na cztery grupy o podobnym stopniu opanowania i wykorzystywania na lekcjach matematyki.

- I. Najlepiej wykształconą kompetencją jest rozwiązywanie problemów. Uczniowie potrafią dokonać rzetelnej analizy problemu zawartego w zadaniu. Rozpatrują problem z różnych perspektyw i szukają jego skutecznych rozwiązań.

II. Średnio o 2 punkty procentowe słabiej wypadają:

- zdolność do efektywnej komunikacji – uczniowie potrafią bronić własnego zdania i aktywnie słuchać;
- przedsiębiorczość – na lekcjach matematyki uczniowie wykazują zdolność przewidywania, szukania nowych, twórczych rozwiązań zadań i wdrażania pomysłów;
- planowanie i organizowanie własnej pracy – uczniowie ustalają podział zadań do wykonania na ważne/nieważne, pilne/niepilne, dobierają odpowiednie narzędzia matematyczne do rozwiązania zadania matematycznego.

III. Na 66,6% ocenili nauczyciele stopień posiadania i stosowania na lekcjach matematyki przez uczniów:

- współpraca w zespole – oceniana była umiejętność budowania pozytywnych relacji i motywowania innych do działania;
- elastyczności – uczniowie dostrzegają nowe pomysły na rozwiązanie zadania, znajdują alternatywne rozwiązania;
- efektywności w działaniu;
- niezależności, czyli zdolności do rozważnego rozumowania i podejmowania decyzji;
- kształcenia ustawicznego – uczniowie uczą się na doświadczeniach i błędach swoich oraz innych osób.

IV. Najsłabiej, o 9 punktów procentowych mniej od umiejętności rozwiązywania problemów, uczniowie radzą sobie z panowaniem nad stresem. Oceniana była umiejętność koncentracji i działania w sytuacjach stresujących, pokonywania trudności, radzenia sobie z nietypowymi zadaniami i panowania nad emocjami.

Pytanie badawcze: W połączeniu z jaką umiejętnością matematyczną/metodą pracy występuje kształtowanie badanej kompetencji miękkiej?

Zdolność do efektywnej komunikacji, a więc m.in. jasnego wyrażania swoich myśli, prezentacji publicznych, obrony własnego zdania i aktywnego słuchania uczniowie doskonalili przy wygłaszaniu referatów, prezentacji, w czasie pracy metodą projektu, współpracy

w grupie. Uczniowie potrafią precyzyjnie komunikować się, dobierać odpowiednie argumenty i wyciągać wnioski.

Umiejętność współpracy w zespole, w tym także budowania pozytywnych relacji, motywowania innych do działania, uczniowie kształcą podczas pracy w zespołach rozwiązujących przydzielone im zadania i w czasie udziału w zespołowych grach matematycznych.

Przedsiębiorczość, w węższym rozumieniu, jako zdolność do dostrzegania nowych możliwości i krytycznej ich oceny, przewidywania, wymyślenia nowych, twórczych rozwiązań, wdrażania pomysłów, podejmowania ryzyka i konsekwentnej realizacji celów rozwijana jest przy rozwiązywaniu zadań tekstowych różnymi metodami, zadań logicznych i zagadek matematycznych. Uczniowie doskonalą tę kompetencję w czasie wycieczek edukacyjnych.

Elastyczność jako zdolność do dostosowania własnych umiejętności do szybkich zmian otoczenia, do wpadania na nowe pomysły, znajdowania alternatywnych rozwiązań i szybkiego podejmowania decyzji wymagana jest przy rozwiązywaniu zadań bazujących na sytuacjach z życia codziennego, stosowaniu w uczeniu się zasady stopniowania trudności, dobieraniu najlepszej metody do rozwiązania zadania.

Efektywność w działaniu wyrażająca się w koncentracji na danym zadaniu i realizacji celu, zgodnie z planem i w optymalnym czasie, a także pokonywania pojawiających się trudności kształcona jest przez planowanie swojego procesu uczenia się, przygotowywania do prac klasowych, egzaminu zewnętrznego, ale także przez samoocenę swoich błędów i umiejętność podejmowania działań mających na celu ich poprawę.

Niezależność, czyli zdolność do bycia proaktywnym, a więc podejmowania inicjatywy, rozwijana jest w czasie rozwiązywania zadań na dowodzenie, zadań interaktywnych oraz gier dydaktycznych. Uczestnictwo w konkursach matematycznych stwarza korzystne warunki do rozwoju proaktywności.

Rozwiązywanie problemów, ich rzetelna analiza, czyli znajdowania

przyczyn, widzenie ich z różnych perspektyw i szukanie skutecznych rozwiązań, doskonalone jest podczas rozwiązywania zadań tekstowych, zwłaszcza tych o większym stopniu trudności. Kompetencja ta szczególnie silnie kształtowana jest przy rozwiązywaniu zadań na dowodzenie i zadań konstrukcyjnych.

Planowanie i organizacja własnej pracy, w tym także ustalanie priorytetów i wybór odpowiednich narzędzi do osiągnięcia celu to systematyczne i metodyczne przygotowanie się uczniów do lekcji i prac klasowych oraz ich udział w projektach badawczych.

Świadomość potrzeby kształcenia ustawicznego, rozumianego jako zdolność do zdobywania wiedzy i nowych umiejętności, uczenia się na doświadczeniach, błędach swoich i innych osób oraz dostrzegania potrzeby uczenia się przez całe życie rozwijana jest przez stosowanie na lekcji oceniania kształtującego.

Możliwość poprawy każdej uzyskanej oceny (zapisana w przedmiotowym systemie oceniania) zmniejsza stres uczniów w czasie odpowiedzi ustnych i pisemnych. Nie wszystkie wystąpienia i prace uczniów zakończone są oceną w postaci stopnia – pozostaje stres związany z wystąpieniem, znika stres spowodowany obawą przed otrzymaniem słabego stopnia.

Z przeprowadzonych badań wynika, że uczniowie na lekcjach matematyki wykazują się posiadaniem i wykorzystywaniem kompetencji miękkich. Matematyka to nauka wykorzystująca analizę i syntezę danych, kształci myślenie logiczne – dlatego nie jest zaskoczeniem pierwsze miejsce kompetencji w zakresie rozwiązywania problemów. Warto zastanowić się, jakie działania, nie tylko na lekcjach matematyki, należy podjąć, aby uczniowie lepiej radzili sobie ze stresem.

Rozwój kompetencji miękkich na lekcjach matematyki odbywa się głównie poprzez stosowanie odpowiednich metod. Kształceniu tych kompetencji sprzyja rozwiązywanie zadań tekstowych, zwłaszcza tych, które można rozwiązać kilkoma metodami, zadań logicznych, zadań na dowodzenie i zagadek matematycznych.

Posiadanie kompetencji miękkich

na wysokim poziomie jest nieodłączne u każdej osoby, której aktywność wiąże się z kontaktem z innymi ludźmi. Kompetencje zarówno twarde, jak i miękkie wpływają na efektywność naszego działania. Wzajemnie się uzupełniając, wpływają na jakość wykonywanej przez nas pracy. Komunikatywny, przedsiębiorczy, umiejący planować własną pracę (kompetencje, które nauczyciele oceniają jako dobrze wykształcone u swoich uczniów) to nie puste hasła, lecz konkretne umiejętności.

Ucząc w szkole, zastanawiamy się, co się pod tymi sformułowaniami kryje i jak możemy je doskonalić. Miejsca świadomości, jak dużą rolę odgrywają one w naszym życiu.

Tekst pochodzi z wydawnictwa konferencyjnego XXV Konferencji Diagnostyki Edukacyjnej pt. *Znaczenie diagnostyki edukacyjnej dla procesu kształcenia*, red. B. Niemierko i M. K. Szmigiel, Kraków 2019.

Słowa kluczowe: kompetencje, kształtowanie kompetencji miękkich na lekcjach matematyki.

Bibliografia:

- Floyer A.: *Doskonałe umiejętności interpersonalne*. Poznań: Dom Wydawniczy Rebis, 2000.
- Gruszczyńska J.: *Wspieranie miękkich kompetencji dziecka*; <https://www.uniwersytet-dzieciocy.pl/files/document/9bbb8aa96abe-ef22a747e470fe7309ee1365173458.pdf> (dostęp: 25 V 2019).
- Grzesiak M.: *Kompetencje miękkie powinny być uczone w szkołach*; <https://www.pulshr.pl/edukacja/mateusz-grzesiak-kompetencje-miekkie-powinny-byc-uczone-w-szkolach,51383.html> (dostęp: 29 V 2019).
- Nolte D., Harris R.: *Dzieci patrzą na nas*. Warszawa: Instytut Wydawniczy PAX, 2013.

Małgorzata Iwanowska – Warszawskie Centrum Innowacji Edukacyjno-Społecznych i Szkoleń.

Beata Wąsowska-Narojczyk – Mazowieckie Samorządowe Centrum Doskonalenia Nauczycieli.

O stosowaniu metod motywujących i aktywizujących na lekcjach matematyki w liceum

dr Witold Pająk

W dobie zmian zachodzących w kształceniu uczniów coraz ważniejszą rolę odgrywają metody motywujące i aktywizujące. Poniższy tekst jest autospójrzaniem autora na te metody z punktu widzenia nauczyciela liceum.

Można się zastanawiać, czy w ogóle trzeba uczniów w liceum motywować do czegokolwiek. Przecież sami wybrali szkołę, wiedzą, że czeka ich matura, a potem dalsza nauka. Takie podejście jest dalece nieostrożne i nieuprawnione wobec uczniów dopiero wchodzących w dojrzałość.

Motywować do pracy (obojętnie, czy w wieku 16 lat, czy później) trzeba zawsze. Dobry pracodawca będzie swoich pracowników motywował do bardziej wydajnej, rzetelnej pracy, bo wie, że przyniesie to realny zysk (w formie materialnej, ale i mentalnej). Motywowanie na lekcji jest poza tym związane z wiekiem samych uczniów, którzy często żyją marzeniami i wyobrażeniami o świecie dorosłych; czasami ich pojmowanie jest związane z bardzo bliską teraźniej-

szością, brak jeszcze świadomego podejścia do swojej własnej przyszłości i oceny potrzeb dla realizacji „lepszego jutra”. Ponadto zdają sobie sprawę, że przyszłość wielu uczniów nie wiąże się z matematyką w ogóle i wówczas takie podejście przyszłościowe dla matematyki nie zaistnieje. Oczywiście, szkoła (rozumiana ogólnie) ma pewne środki „nacisku”, a mianowicie ocenę, nagrody, stypendia, kary itp. Jednak prawdą jest, że lepiej zmotywować uczniów na lekcji to lepsza jakość tej lekcji – zarówno w sensie pracy nauczyciela, jak i późniejszych rezultatów samych uczniów.

Motywacja powinna być nakierowana na cele bliższe, czyli na poznanie konkretnych wiadomości i umiejętności matematycznych (w danym okresie nauki, na danej lekcji) – ważnych dla dalszej pracy na matematy-

ce. Jeśli uczniowie nie nabędą określonych sprawności, to w dalszej pracy nauka stanie się prawie niemożliwa albo co najmniej męcząca. Efektem celów bliższych są np. matura, zaliczanie kolejnych lat nauki, pozytywnie napisany sprawdzian.

Motywacja powinna być również, a może przede wszystkim, nakierowana na cele dalsze: na kształcenie pewnych ogólnych umiejętności (aktywności) matematycznych, takich jak: dowodzenie, definiowanie, praca z tekstem, stosowanie nowoczesnych środków komunikacyjnych, abstrahowanie, tworzenie analogii itp. Te aktywności są niezwykle ważne, ale jednocześnie bardzo trudne i czasochłonne w realizacji – to jest proces, który planowo powinien się zacząć w klasach początkowych szkoły podstawowej, a zakończyć w szkole liceal-



Fot. M. Grewenda

nej na każdym etapie, jakby „na coraz wyższych szczebelkach” abstrakcji matematycznej. Te cele są dla mnie szczególnie ważne, bo to właśnie one dają sens mojej pracy. Ponadto nie zapominam o celach wychowawczych – kształcę i kształtuję przyszłego Polaka – chcę, aby był uczciwy, pracowity, rzetelny w swojej pracy, prawdomówny, szanował innych i kochał ojczyznę.

Motywowanie uczniów zaczyna się od dobrze sformułowanych zasad wzajemnej pracy. Wyraźnie oddzielam proces uczenia się od procesu sprawdzania spełnienia określonych wymagań edukacyjnych. Motywacja nastawiona jedynie na zdobywanie ocen i określanie ich średnich (nader często stosowana przez nauczycieli, rodziców i uczniów) jest motywacją nastawioną na niewłaściwy kierunek. Jej skutkiem nie jest lepsza praca bądź umiejętności, wiadomości, ale lepsza ocena. Sprawdzanie wiadomości powinno następować nie za często (3–4 razy w semestrze), aby był czas na pracę, na ugruntowanie wiadomości. W okresie między sprawdzianami uczniowie również otrzymują oceny, ale mają one charakter informacyjno-motywacyjny – dla nich i dla rodziców o bieżących postępach, o trudnościach, o tym, nad czym należy jeszcze solidnie popracować. Po takich informacjach uczeń powinien mieć świadomość swojego stanu wiedzy „na dziś”, powinien te informacje właściwie wykorzystać.

Taki sposób oceniania sprawdza się u mnie od kilku już lat, choć są również i jego oponenti – ci, którzy uwielbiają liczyć średnie. Inną formą motywacji jest możliwość nieskrępowanego zadawania przez uczniów pytań na temat treści realizowanych na lekcji, zadań domowych itp. Taki czas jest zawsze na początku lekcji – na ogół uczniowie z niego dość ochoczo korzystają; czasem trwa to kilka minut, a czasem dłużej. Uważam, że nie jest to czas stracony, zaspakaja ciekawość ucznia, chęć uzyskania poprawnego rozwiązania w zadaniu domowym, chęć lepszego zrozumienia treści lekcji itp. Jeśli uczeń zadaje mi pytanie, to znaczy, że coś go zainteresowało, zaniepokoiło, lub chce wiedzieć lepiej. Na lekcjach bardzo ważnym

komponentem jest dyskusja, stawianie uczniów w sytuacjach wyboru, np. po rozwiązaniu uczniowskim nauczyciel proponuje inne rozwiązanie (z innym wynikiem, bo tamto było nieprawidłowe albo nauczyciel prowokuje do rozważań) – wywołując w uczniach niepewność.

Aktywizowanie uczniów na lekcjach matematyki jest zadaniem trudnym, bo związanym z pracą umysłową. Nie można młodych ludzi aktywizować, zapraszając do tablicy (czyli „na spacer”), bo to jest aktywność fizyczna, a nie intelektualna. Aktywizowanie matematyczne musi polegać na pracy umysłu ucznia, a nie jego mięśni nóg czy rąk (choć często jest to mylone przez osoby niedoświadczone w pracy matematycznej). Uczeń jest zaktywizowany, gdy wykonuje „na potęgę” procesy myślowe; na lekcji może być cichy, nie zgłaszać się, ale w jego głowie przebiega wiele różnych procesów myślenia (rozwiązuje, przelicza, tworzy strategię, bada, sprawdza itp.). Wspominając o aktywizowaniu, właśnie takie podejście mam na myśli.

Aktywizacja młodych ludzi jest ciągiem pewnych czynności uzależnionych od obserwacji nauczycielskich uczniów oraz ich zaangażowania. Na lekcji matematyki potrzebna jest cisza – to ona zagwarantuje możliwość pracy umysłowej. Hałas, ruch, dynamika różnych zdarzeń nie sprzyja pracy umysłowej ucznia. Cały czas obserwuję uczniów podczas lekcji – wpatruję się w ich twarze, zwracam uwagę na ich reakcje, na ich słowa, gesty, staram się dostrzegać, czy myślą, czy udają i wtedy dopiero zachęcam ich do pracy. Jeśli widzę, że uczniowie myślą, to jeśli nie muszą, nie przerywam im ich toku myślenia albo proszę o jego przedstawienie (gdy czas nagli).

Czasami trzeba uczniów po prostu „rozbudzić”, a czasem skierować ich wysiłki na właściwe „tory”. Zatem wybrana metoda motywująca lub aktywizująca powinna być dostosowana do chwili, w której ją trzeba zastosować oraz w stosunku do kogo ona ma być skuteczną.

Na moich lekcjach aktywizacja (lub też motywowanie) uczniów przybiera różne formy, są to np.:

- krótka informacja z historii mate-

matyki (np. na temat ciągu Fibonacciego przy okazji omawiania zagadnień dotyczących ciągów);

- krótka informacja matematyczna, ale nieobjaśniana normalnie na lekcjach (np. dlaczego nie dzielimy przez zero, dlaczego liczb naturalnych jest tyle samo co liczb wymiernych);
- zaproszenie „śpiącego” ucznia do tablicy, aby wspólnie ze mną rozwiązywał zadanie (bez oceniania);
- „zaglądanie” uczniom do ich zeszytów i wskazywanie, że oczekuję pewnych wyników czy przemyśleń;
- zachęcenie uczniów do własnej (nieobowiązkowej) pracy, np. poprzez podanie literatury, wskazanie odpowiednich środków dydaktycznych (np. komputer), wskazanie ciekawego problemu.

Ważnym elementem aktywizującym oraz motywującym uczniów jest taka konstrukcja lekcji, w której młody człowiek ma coś odkryć. Co więcej, powinien mieć przeświadczenie o doniosłości tego faktu. Wymaga to zaaranżowania odpowiedniej sytuacji dydaktycznej (np. poprzez obserwację komputerowe, czytanie tekstu, odpowiednio dobrany problem i pytanie). Również wtedy nauczyciel winien wykazywać równie wysokie zainteresowanie problemem, być może należy umiejętnie odegrać swoją rolę.

Poznanie wiedzy i odkrywanie jej przez uczniów powinno mieć charakter wiedzy nowej dla nich (oczywiście nowej w znaczeniu subiektywnym), zgodnie ze stwierdzeniem: „Dajmy uczniom odczuć to samo podniecenie, jakie odczuwa badacz, gdy znajdzie metodę rozwiązania intrygującego problemu albo przyjemność, której on doświadcza, widząc piękno i symetrię kształtów lub idei” (Nowak, 1989).

Problemy matematyczne powinny fascynować nauczyciela, uczeń widzący swego „mistrza” zafascynowanego problemem w jego rozwiązanie może tę obserwację przełożyć na swoje własne zainteresowanie. Jednak to nie może być zaangażowanie w problem zbyt odległy od możliwości uczniów albo o zbyt skomplikowanej strukturze, albo o długim wprowadzeniu – to może wywołać efekt odwrotny. Problem powinien być dopasowany dla

uczniów, do ich wieku i możliwości. Czasami również trzeba uczniom odpowiadać na pytanie „Po co mi ta wiedza”. Nie zawsze taka odpowiedź jest łatwa i natychmiastowa, ale jeśli można, to warto na takie pytania odpowiadać lub też na wstępie nauki o tym powiedzieć, np. przy celach nauczania matematyki.

Osobnym elementem motywująco-aktywizującym może być praca w grupach. To jest bardzo trudna forma lekcji, gdy się chce ją dobrze spożytkować. Podział na grupy powinien uwzględniać taki dobór uczniów, aby wśród nich był „lider” czy „robotnik”. Jeśli będzie za dużo „liderów”, to nie-

wiele z takiej pracy będzie. Ponadto praca w grupie musi tak wyglądać, aby każdy miał swoje własne zadanie, które dla dobra ogólnego wyniku grupy musi rozwiązać – zadania powinny być w możliwościach uczniów: nawet słabszy uczeń ma otrzymać problem, za który będzie osobiście odpowiedzialny. W grupach nikt nie powinien wykorzystywać pracy innych dla poprawy swojego wizerunku.

Motywowanie i aktywizowanie uczniów jest sztuką, może i grą nauczyciela, którą trzeba dobrze zaaranżować i odegrać zgodnie ze scenariuszem powstającym w każdej minucie prowadzonej lekcji.

Słowa kluczowe: metody motywujące i aktywizujące, lekcje matematyki, liceum.

Bibliografia:

- Krygowska Z.: *Zarys dydaktyki matematycznej*. Cz. 2. Warszawa: WSiP, 1977.
- Nowak W.: *Konwersatorium z dydaktyki matematycznej*. Warszawa: PWN, 1989.



Dr Witold Pająk – profesor oświaty, doktor nauk matematycznych, rzeczoznawca MEN, nauczyciel w Powiatowym Zespole Szkół Ogólnokształcących nr 1 im. ks. St. Konarskiego w Oświęcimiu.

Alfy, bety i omegi...

Damian Cisowski

Symbolizm w matematyce jest podstawą dogłębnego i spójnego logicznie spojrzenia na treści twierdzeń i definicji. Jego poprawne stosowanie jest podstawą efektywnego rozwiązywania zadań i problemów matematycznych.

Przelom dziewiętnastego i dwudziestego wieku przyniósł całemu naukowemu światu krystalizację idei uniwersalnego języka matematycznego wraz z narodzinami nowego działu tej nauki – logiki matematycznej. Ogólne zasady zapisu i notacji zdań i formuł matematycznych kształtowały się już co najmniej od czasów Arystotelesa i Euklidesa, których śmiało można nazwać starożytnymi postulatorami wprowadzenia ścisłego języka matematycznego. Na przełomie wieków symbolikę matematyczną kształtowali: Newton, Leibnitz, Kartezjusz, Boole i inni wielcy. Jednakże dopiero wkład pracy takich osobowości jak Gottlob Frege, George Cantor, Giuseppe Peano czy Bertrand Russell przyczynił się bezpośrednio do ostatecznej formalizacji ścisłego języka matematycznego wraz z jego gramatyką.

Symbolizm w matematyce, tak nielubiany przez wielu uczniów i studentów oraz niejednokrotnie (o zgrozo!) zbyt upraszczany i traktowany po macoszemu przez nauczycieli, jest podstawą

dogłębnego i spójnego logicznie spojrzenia na treści twierdzeń i definicji. Jego poprawne stosowanie jest również podstawą efektywnego rozwiązywania zadań i problemów matematycznych.

Nauczyciel winien, rzecz jasna, zdać sobie sprawę z poziomu zaawansowania swoich podopiecznych. Na innym bowiem poziomie poznanie zasad języka matematycznego wymagać należy od ucznia klasy ogólnej, na innym od ucznia klasy rozszerzonej a jeszcze na innym od studenta matematyki. Nauczanie matematyki łączyć powinna jednak idea rozumnego i logicznego konstruowania zdań i wypowiedzi oraz umiejętność poprawnego wprowadzanie stosownych oznaczeń.

Z problemem powyższym spotykają się najczęściej nauczyciele liceów ogólnokształcących oraz techników. Od ucznia szkoły podstawowej nie wymaga się na ogół (z oczywistych względów) pedantycznego stosowania notacji matematycznej. Świeżo upieczony abiturient szkoły podstawowej wkraczają-

cy w mury szkoły średniej staje jednak przed nie lada wyzwaniem, aby odnaleźć się w świecie symboliki logicznej, greckich liter i najróżniejszych „egzotycznych” znaków i formuł.

Nauczyciel powinien stać się w tym miejscu przewodnikiem, który poprowadzi swego podopiecznego przez nieznaną sferę, ucząc go w mądry sposób korzystać z dobrodziejstw symboliki i języka matematycznego. Wyżej opisany problem można podzielić na kilka zasadniczych kategorii, które postaram się Szanownemu Czytelnikowi opisać możliwie ściśle i zwięźle, uzupełniając każdy akapit odpowiednim przykładem.

Wprowadzenie oznaczeń do rozważanego zadania matematycznego

Przystępując do rozwiązania zadania, w którym autor nie narzucił z góry odpowiedniego oznaczenia wielkości i niewiadomych, uczeń musi samodzielnie zdecydować o użyciu stosownych liter

lub symboli, które pomogą mu odnaleźć się w gąszczu danych i szukanych w rozważanym problemie matematycznym. Nie warto bagatelizować nauki spójnego wprowadzania oznaczeń.

Owszem, sytuacja, gdy np. pięciokąty ROMEK i TOMEK będą dwoma wielokątami podobnymi (o czterech wspólnych wierzchołkach), może wydać się na lekcji zabawna, lecz nie pomoże w rozwiązaniu skomplikowanego problemu geometrycznego. Pozostając w kręgu wielokątów, nie warto również zachęcać do dowolnego oznaczania wierzchołków figur (co może zachęcić do wprowadzenia zanadto niepoważnej kombinacji liter), czego nauczyciel może pożałować, gdy przestanie dostrzegać komiczny akcent owej sytuacji. W notacji figur podobnych pomoc mogą „primy” (A') i „bisy” (A''), jednakże niestanność notacji uczniów może utrudnić nawet im samym poprawne rozwiązanie zadania. Być może bezpieczniejszą metodą jest wprowadzenie indeksowanych punktów, np.: $P_1, P_2, \dots$. Umiejętność wprowadzania indeksów przy stosowanych oznaczeniach przyda się uczniom, którzy będą kontynuować naukę matematyki na studiach technicznych i teoretycznych w późniejszym czasie (m.in. przy oznaczaniu sum lub przekrojów skończonych i nieskończonych).

Nauka rozsądnego wprowadzania oznaczeń ułatwi młodemu człowiekowi odnalezienie się w zawiłym problemie matematycznym. Na przykład, gdy rozważamy dowolny trójkąt o bokach: a, b i c oraz odcinki łączące nieznanie początkowo punkty położone na owych bokach, łączące je przykładowo z przeciwległymi wierzchołkami tego trójkąta, to wprowadzenie dowolnym oznaczeń dla nowo powstałych odcinków: x, y, z, t, m i p nie pomoże uczniowi w odnalezieniu się w gąszczu następujących rachunków i przekształceń. Zaproponowanie oznaczenia literacją odcinków będących częścią danego boku: a_1 i a_2 dla boku a , b_1 i b_2 dla boku b oraz c_1 i c_2 dla boku c uruchomi w odpowiednim momencie ciąg skojarzeń, który doprowadzi ucznia do poprawnego rozwiązania zadania. Każdy nauczyciel bez trudu dostrzeże analogiczne rozwiązanie w przypadku układów równań z trzema lub czterema niewiadomymi lub porządkowaniu danych statystycznych określonego rodzaju.

Poprawne rozumienie i użycie spójników logicznych

Z wielką satysfakcją stwierdzić można fakt, iż logika matematyczna (a przynajmniej podstawy języka matematycznego) wraca po latach do łask na łamach podręczników szkolnych w mniejszym niż przed poprzednią reformą, ale jednak w dość satysfakcjonującym wymiarze. Spójniki logiczne, przemilczane lub nie, „dopadały” ucznia prędzej lub później, na przykład podczas rozwiązywania nierówności z modułem („Przedział w lewo czy w prawo?”, „Dwa czy jeden?”) lub w problemie wyznaczenia dziedziny wyrażenia wymiernego („Wykluczamy jedną z liczb zerujących mianownik czy wszystkie?”). Nie mówiąc o konsternacji niejednego ucznia w przypadku porównania rozwiązywania równania (o kilku rozwiązaniach), np.: $(x-2)(x+3)(x-7)=0$ i nierówności $(x-2)(x+3)(x-7)\neq 0$.

Poprawna znajomość podstawowych spójników logicznych gwarantuje, iż uczeń będzie powyższe zadania rozwiązywać bez konieczności zgadywania lub stosowania reguły „pół na pół”. Upraszczanie matematycznej interpunkcji poprzez stosowanie zapisu spójników w formie literalnej „i” oraz „lub” nie ułatwi młodemu człowiekowi zadania. Zwłaszcza że w przypadku drugiego z tych spójników kryje się pułapka w postaci pomylenia znaczenia alternatywy „lub” z alternatywą wykluczającą „albo”, co dla przeciętnego ucznia jest początkowo trudne do zauważania.

Starannie przeprowadzana lekcja logiki wraz z wprowadzeniem podstawowych spójników logicznych oraz stosownymi przykładami pomoże na przyszłość zapobiec przykrym niespodziankom i kłopotliwym pytaniom.

Alfabet grecki

Nie ma potrzeby wprowadzania na poziomie szkoły średniej (uprzednio podstawowej) całego alfabetu greckiego, lecz zapoznanie z pierwszymi literami alfabetu greckiego: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i ϵ pomoże przykładowo uniknąć oznaczenia kąta i odcinka lub wektora i półprostej tą samą literą a ponadto pomoże łatwiej zlokalizować uczniowi w gmatławaniu oznaczeń i rachunków szukane wielko-

ści. Spoza matematycznych pożytków można w tym miejscu nadmienić naukę starannego pisania, którego litery alfabetu greckiego wymagają od piszącego. Zaskoczeniem dla ucznia może się okazać, że duża „delta” nie jest symbolem trójkąta, a „ośmiornica”, którą oznaczamy przestrzeń zdarzeń elementarnych, jest ostatnią (wielką) literą owego starożytnego alfabetu.

Reasumując powyższe rozważania, umiejętność wprowadzania oznaczeń i dokonywania związanego z tym wyboru, świadomego logicznego rozumienia zapisanych zdań oraz szeregowania i porządkowania danych przyniosą uczniom wiele pożytku. Oprócz oczywistego, czyli efektywnego rozwiązania zadań matematycznych, warto również wspomnieć o mniej abstrakcyjnych i bardziej przyziemnych. Można śmiało nazwać takie umiejętności kluczowymi, gdyż dzięki ich opanowaniu łatwiejsze będzie dla absolwenta naszej szkoły odnalezienie się w dorosłym życiu w stosie bankowej dokumentacji, porządkowaniu danych (wirtualnych i nie tylko), a może nawet... zaplanowaniu skomplikowanego planu podróży lub sporządzeniu listy zakupów. A może zabrnąłem jednak za daleko...?

Słowa kluczowe: symbolizm w matematyce.

Bibliografia:

- Kharde D. U.: *The Symbolic Language of Mathematics*. „Universal Journal of Mathematic and Mathematical Sciences” vol. 1, 1/2016. Pushpa Publishing House, Abu Dhabi University.
- Skóra M., Lisicki M.: *Matematyka od przedszkola Metody i zasady wprowadzania pojęć matematycznych. Przygotowanie do rozumienia liczb i posługiwania się nimi*. Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji, 2015.
- Walicki M.: *Introduction To Mathematical Logic*. World Scientific Pub Co Inc., 2011.



Damian Cisowski – matematyk, absolwent wydziału Matematyki Fizyki i Chemii Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, członek Polskiego Towarzystwa Matematycznego, nauczyciel szkół ponadpodstawowych.

Odkrywanie matematyki i zadziwienie jej pięknem

dr Bronisław Pabich

Jeśli nauczycielskie pasje mają być inspiracją dla ucznia, to najpierw nauczyciel musi jakieś pasje wykazywać. Skąd je brać? W przypadku matematyki jest to bardzo proste. Wystarczy w swoim życiu napotkać na nauczyciela, dla którego matematyka jest pasją!

Można też inaczej – trafić na wyjątkowo ciekawe i nieznanne nam publikacje matematyczne. Ale pasja nie wystarcza. Musimy sami zadziwiać się matematyką i zadziwiać nią swoich uczniów. Najlepszym źródłem inspiracji jest metoda odkrywczego nauczania matematyki. Jeżeli sami nie potrafimy nic odkryć, próbujemy udawać, że to nasi uczniowie odkrywają coś nowego, im nieznanego. Takie odkrycia dowartościowują młodych ludzi i dają im wiarę w siebie. Reagujemy na każde pytanie uczniów, bo w nich jest źródło odkrycia. Nasza wiedza nie pozwala nam spojrzeć inaczej na znany nam problem. Popołniamy wówczas błędy epistemologiczne, gdy tymczasem uczniowie mogą jakiś problem widzieć zupełnie w inny sposób.

Odkrywanie matematyki ułatwia zastosowanie programów dynamicznych, typu GeoGebra, Cabri czy SketchUp. Dynamika tych programów pozwala nam dostrzec to, czego nie zobaczymy na statycznym obrazie, np. niezmiennicze własności ruchomych obiektów, szczególnie w geometrii.

Tak realizowana matematyka, nieco zgeometryzowana, pozwala nam uczyć z powodzeniem i odkrywać fakty z algebry, analizy czy statystyki. Myślę, że wśród licznych przykładów, które tu przedstawię, znajdą Państwo coś, co stanie się inspiracją do nauczania z pasją.

Pamiętajmy o zadawaniu ciekawych pytań młodym ludziom, cierpliwie odpowiadajmy na ich pytania, zadziwiamy ich czymś zaskakującym, nie krytykujemy ucznia za błędy, gdyż często są to „błogosławione” błędy. Ukazujemy miejsca, w których to, czego uczy-

my, ma swoje zastosowanie, rozwiązujemy jedno zadanie kilkoma sposobami, a nie kilka zadań jednym sposobem. Poszukujemy heurystyk razem z naszymi uczniami.

Przykład 1.

Czy to przypadek, że $\frac{1}{6 \cdot 7} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$?

Przykład 2.

Temat okręgu wpisanego i opisanego realizowany jest zazwyczaj na dwóch osobnych lekcjach. Ale jeśli przez przykład uda się nam zrobić to z komputerem na jednej lekcji, może nas zaskoczyć małe odkrycie. Wykreślimy symetralne trójkąta. Znajdźmy środek okręgu opisanego na nim i wykreślimy go. Następnie skonstruujemy dwusieczne kątów tego samego trójkąta. Gdzie przecinają się symetralne z dwusiecznymi? Spróbujemy udowodnić odkrytą hipotezę.

Przykład 3.

Uczennica, która twierdzi, że zna konstrukcję stycznej do okręgu, rozpoczyna tę konstrukcję niepoprawnie. Nie przerywamy jej, tylko wykorzystując jej błąd (błogosławiony błąd) możemy odkryć nową konstrukcję stycznej. Ale w tym wszystkim jest ważna rola nauczyciela – on nie gani błędu uczennicy, tylko kontynuuje konstrukcję, naprowadzając uczniów na właściwy trop. Tu liczy się spostrzegawczość nauczyciela, który w porę dostrzegł tę konstrukcję. Ale nie dostrzegłby jej nigdy, gdyby nie błąd uczennicy.

Przykład 4.

Czy na matematyce można się wzbogacić? Pomyślimy sobie dowolną liczbę. Utworzymy na jej bazie ciąg kolejnych

liczb według pewnej reguły. Jeśli jest parzysta, to dzielimy ją przez 2, otrzymując kolejną liczbę, a jeśli nieparzysta, to mnożymy ją razy 3 i dodajemy cyfrę 1. Odkryjemy ważną własność tego ciągu. Nagrodą za udowodnienie tej własności jest kwota 1000 000\$.

Przykład 5.

Wiemy, że jedna z 11 siatek sześcianu jest zwykłym krzyżem. Czy może to być siatka również innego wielościanu?

Przykład 6.

Spróbuję zaskoczyć pytaniem: Czy można wyznaczyć miejsca zerowe trójmianu kwadratowego za pomocą cyrki i linijki?

Przykład 7.

Od prostej układanki do ciekawych odkryć. Należy złożyć z dwóch części czworoscian foremny. Następnie sklejamy je ze sobą i kreślimy na jego ścianach odcinki równoległe do boków kwadratowego przekroju tego czworoscianu foremnego. Są one bokami prostokątów – przekrojów równoległych do przekroju kwadratowego. Który z przekrojów ma największy obwód?

Przykład 8.

Ucznia można też zainteresować matematyką poprzez łatwe, krótkie zadania, na których uczeń popełnia błąd. Np. do ścian ostrosłupa czworokątnego o krawędziach tej samej długości przyklejono czworoscian foremny. Ile ścian ma tak uzyskany wielościan?

Przykład 9.

Kopernik w swojej pracy wykazał się wielką znajomością matematyki. Zajmując się ruchami planet, wymyślił

problem: Jaka krzywa zakreśli punkt okręgu toczącego się wewnątrz drugiego okręgu o średnicy dwukrotnie większej?

Przykład 10.

Ile jest równa nieskończona suma ułamków: $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots$ bez obliczania i stosowania znanych wzorów.

Przykład 11.

W ilu miejscach wykres funkcji wykładniczej i logarytmicznej o tej samej

podstawie przecinają się ze sobą?

Przykład 12.

Potrąfimy wpisać kwadrat w koło. A czy potrafimy wpisać sześciąt w kulę?

Więcej informacji na stronie: www.math-comp-educ.pl

Słowa kluczowe: matematyka.

Referat wygłoszony przez dr Bronisława Pabich w czasie konferencji pt.

„Matematycznie zakręcenie”, z cyklu „Nauczycielskie pasje inspiracją dla ucznia”, zorganizowanej przez MCDN Ośrodek w Krakowie 6 listopada 2019 roku.

Dr Bronisław Pabich – Kuźnia Wiedzy w Kampusie Wielickim. Autor wielu publikacji popularyzujących programy geometryczne do tworzenia figur przestrzennych. Prowadzi liczne wykłady dla uczniów, ukazując im piękno geometrii.

Przyroda generuje problemy matematyczne

Tadeusz Marczewski
dr Zbigniew Powązka

Każdy człowiek znajduje się w określonej przestrzeni. Charakteryzuje ją wiele czynników. Z jednej strony jest to przestrzeń trójwymiarowa wyposażona w parametry fizyczne. Z drugiej zaś jest to otaczająca nas przyroda w bardzo bogatym znaczeniu, którą ogólnie nazywamy środowiskiem. Poruszając się w tym środowisku, nabywamy pewnych doświadczeń, stosując np. aparat matematyki. W poniższym artykule przedstawimy kilka takich przykładów.

W „Hejnale Oświatowym” nr 5/153/2016 znajduje się artykuł poświęcony związkom matematyki z przyrodą (Powązka, 2016). Był on pokłosiem konferencji zorganizowanej w MCDN Ośrodek w Krakowie przez T. Marczewskiego. Nie wyczerpał on bogatej tematyki związanej z relacjami między matematyką i przyrodą. Zagadnienia te powinny leżeć w zainteresowaniach dzieci, młodzieży i nauczycieli obu przedmiotów. Oczywiście język matematyki nadaje się do opisu pewnych zjawisk przyrodniczych. Nic też dziwnego, że podręczniki szkolne i zbiory zadań zawierają interesujące zadania z przyrodą w tle. Przyroda należy do dyscyplin doświadczalnych, a matematyka do dyscyplin teoretycznych i ten doświadczalny charakter warto także wykorzystywać w różnych sytuacjach dydaktycznych na zajęciach z matematyki. Co ważniejsze, obliuguje do tego nas, nauczycieli matematyki, m.in. co naj-

mniej ósmy z trzynastu celów ośmio-klasowej szkoły podstawowej wskazany we wstępie do podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej: „wyposażenie uczniów w taki zasób wiadomości oraz kształtowanie takich umiejętności, które pozwalają w sposób bardziej dojrzały i uporządkowany zrozumieć świat. Dobitnie »mówi« o tym też charakterystyka matematyki w tymże wstępie, zwracająca uwagę na to, że matematyka (...) jest nauką, która dostarcza narzędzi do poznawania środowiska i opisu zjawisk, dotyczących różnych aspektów działalności człowieka (...)”.

Powyższe uwagi wydaje się podtrzymywać podstawa programowa kształcenia ogólnego dla czteroletniego liceum ogólnokształcącego i pięcioletniego technikum, wskazując m.in. w ósmym celu tychże szkół na zadanie: „(...) wyrabiania pasji poznawania świata i zachęcania do praktycznego zastosowania zdobytych wiadomości.

Również w charakterystyce matematyki na tym poziomie »mówi się« o: „stosowaniu obiektów matematycznych do opisu bądź modelowania zjawisk obserwowanych w rzeczywistości”.

Poniżej opiszemy zatem kilka sytuacji z otaczającej nas rzeczywistości, wymagających użycia narzędzi matematycznych, oraz kilka zadań z podręczników szkolnych.

Zadania matematyczne inspirowane przyrodą

Obcując z przyrodą, dostrzegamy zjawiska, których rozwiązanie sprowadza się do zadania matematycznego. Przykładem takiej sytuacji może być cień rzucany przez człowieka w słoneczny dzień. Przyglądając się temu zjawisku, widzimy, że długość cienia zależy od godziny, w której go obserwujemy. Warto postawić problem, jaka jest

zależność długości cienia od długości obserwatora. W jakim momencie dnia obie długości są równe? Czy długość cienia zależy tylko od pory dnia, czy może od pory roku?

W szkole podstawowej możemy ograniczyć się tylko do badań empirycznych, formułując pewne hipotezy. Na tym poziomie nauczania, po opracowaniu podobieństwa trójkątów, warto przytoczyć metody badania wysokości niedostępnej skarpy opisanej np. w książce J. Verne'a *Tajemnicza wyspa*, a zacytowanej również w książce *Ciekawa geometria* (Perelman, 1953). Polega ona na budowie stosownych prostokątnych trójkątów podobnych, w których długości przyprostokątnych jednego trójkąta i długość jednej z przyprostokątnych drugiego trójkąta są znane, a długość drugiej z przyprostokątnych należy wyznaczyć i nie da się jej efektywnie zmierzyć posiadanymi w danej chwili narzędziami. Przeciwnieprostokątne każdego z tych trójkątów leżą na stosownym promieniu słonecznym. Przy okazji wędrówek po leśnych ścieżkach warto zaproponować uczniom mierzenie wysokości drzewa. Można to zrobić np. metodą opisaną powyżej.

Pełne rozwiązania takich zadań z wykorzystaniem trygonometrii poznają uczniowie dopiero w szkole ponadpodstawowej. Wiele tego typu zadań znajdzie czytelnik w wyżej wskazanej książce. W zbiorach zadań przy okazji trygonometrii znajdują się zadania dotyczące drzew oraz ich cieni rzucanych w słoneczny dzień. Warto w tym miejscu zauważyć, że z cieniem mamy do czynienia również w księżycową noc, lecz zadań takich na ogół brak w opracowaniach dla uczniów.

Kolejnym ciekawym problemem jest szacowanie objętości ściętych pni drzew. Taka kłoda drewna, nawet okorowana, nie przypomina żadnej z brył obrotowych znanych uczniowi. Okazuje się, że w wyniku skomplikowanych rozważań związanych z rachunkiem całkowym uzyskano wzór uniwersalny nadający się do oszacowania objętości drewnianej kłody. Łatwo pokazać, że z tego wzoru otrzymuje się wzory na objętości graniastosłupa, ostrosłupa, walca, a nawet stoż-

ka, stożka ściętego lub też kuli. Oto ów wzór, zwany wzorem Simpsona¹ (Perelman, 1953):

$$V = \frac{h}{6} \cdot (P_1 + 4 \cdot P_2 + P_3),$$

gdzie h oznacza wysokość bryły, P_1 pole podstawy „dolnej”, P_2 pole przekroju środkowego (w połowie wysokości), P_3 pole podstawy „górnej”. Przy ostrosłupie i stożku $P_3 = 0$. Wprowadzenie wzorów na objętości szkolnych brył z wzoru Simpsona jest kształcącym ćwiczeniem. Gdy w przypadku kuli, za wysokość h podstawimy jej średnicę $2r$ (a nie promień r), oczywiście 0 za P_1 i P_3 , a πr^2 za P_2 , to otrzymamy

$$V = \frac{2r}{6} \cdot (0 + 4\pi r^2 + 0) = \frac{8}{6} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

a więc wzór na objętość kuli.

Eksperyment, czyli jedna z metod poznawania przyrody, może być także źródłem ciekawych sytuacji dydaktycznych na zajęciach z matematyki. Może on świetnie wesprzeć czynnościowe nauczanie matematyki. I to wszystkie jego elementy: działanie badawcze, obserwacja i sporządzenie opisu wraz ze stawianiem hipotez. Pomocze, w ważnej dla uczenia się matematyki, nauce stawiania pytań i formułowania hipotez.

W niektórych obecnych podręcznikach do matematyki pojawiają się informacje o graniastosłupach pochyłych (np.: Braun i inni, 2018 – klasa 5 i 8), zwraca się uwagę m.in. na ich wysokość, siatki i objętość (jednak ilustruje się je tylko w paru zadaniach).

Jeśli np. na zajęciach koła matematycznego uczniowie dostaną duże ziemniaki, a jeszcze lepiej po buraki cukrowe, nożyki, pisaki piszące po szkle i odpowiedniej wielkości słoiki z wodą, z łatwością postawią hipotezę, że np. prostopadłościan i prostopadłościan pochyły o tych samych podstawach i wysokościach mają taką samą objętość. A gdyby jeszcze wtedy sięgnąć po pędzelki, farby plakatu i kartki, to konstrukcja siatki prostopadłościanu i prostopadłościanu pochyłego nie sprawi uczniom żadnego kłopotu w zrozumieniu trudnego pojęcia siatki i na dodatek w wyznacze-

niu wszystkich siatek, np. tego samego prostopadłościanu.

Jeśli nauczyciel ma nieco więcej czasu na staranne manipulacje uczniów, może podobnie eksperymentować z „łatwymi” graniastosłupami prostymi i pochyłymi o podstawie trójkąta lub równoległoboku. Wtedy nic nie stanie na przeszkodzie, by wcześniejszą hipotezę o równości objętości prostopadłościanu i prostopadłościanu pochyłego o takich samych podstawach i wysokościach łatwo przedłużyć na dowolne takie graniastosłupy.

Zadania matematyczne o treści przyrodniczej

W tej części artykułu podamy przykłady zadań z przyrodą w tle. Istotne w nich są problemy matematyczne, a sytuacja przyrodnicza (właściwie anegdotyczno-przyrodnicza) jest prawdopodobna.

Pierwsze zadanie wiąże się czasem z Leonardem z Pizy². Oto one: *Dwa ptaki wylatują w tym samym momencie ze szczytów dwóch wież, oddległych od siebie o 50 metrów. Wysokość jednej wieży wynosi 30 metrów, a drugiej 40 metrów. Lecąc z tą samą prędkością, dolatują w tym samym momencie do fontanny usytuowanej na prostej pomiędzy dwiema wieżami (na poziomie gruntu). W jakiej odległości od podstawy każdej wieży znajduje się fontanna?*

Zadanie to wymaga zastosowania twierdzenia Pitagorasa. Przystępując do rozwiązania, uczeń musi uświadomić sobie, że oba ptaki pokonują do fontanny drogę tej samej długości.

Zadanie drugie zostało zaczerpnięte z książki *102 zadania dla małych, średnich i dużych sympatyków matematyki* (Ciesielski, 2012): *Ślimak wspina się po pniu na drzewo. Codziennie pokonuje 6 m do góry, ale w nocy obsuwa się o 4 m w dół. Drzewo ma 10 m wysokości. Po ilu dniach dotrze na wierzchołek drzewa?* Zadanie to pojawiało się z różnymi danymi w podręcznikach szkolnych (Kubat, Marczewski, Went, 1999). W książce *102 zadania...* podane są przesłanki heurystyczne, które mogą pomóc czytelnikowi znaleźć rozwiązanie. Przesłanki takie zostały opracowane przez au-



Fot. M. Grewenda

tora do każdego ze 102 zadań w niej zamieszczonych. W rozwiązaniu zadania uczeń powinien uświadomić sobie po pierwsze, że zadanie jest wieloetapowe, po drugie, że występują w nim dwie miary – miara czasu i miara odległości, po trzecie, że porusza się w tym samym tempie, tzn. ślimak przez kilka dni pokonuje drogę tej samej długości, ale każdego dnia startuje z innej odległości od ziemi.

Na koniec zauważmy, że w tego typu zadaniach kryje się pewne niebezpieczeństwo w formułowaniu zadań związanych z przyrodą. Oto zadanie: *Wiek niektórych drzew (w latach) można wyznaczyć w następujący sposób. Ustalamy obwód (w centymetrach) pnia drzewa na wysokości 1,3 m od ziemi. Jeśli do połowy obwodu (w centymetrach) dodamy jego obwód i otrzymamy liczbę podzielimy przez 2, to wynik jest w przybliżeniu równy wiekowi pnia w latach.*

Zapytaliśmy leśników, co sądzą na temat tego zadania. Usłyszeliśmy następujące stwierdzenie: „Tak naprawdę bardzo rzadko mamy potrzebę w leśnictwie szacowania wieku drzew. Od końca II wojny światowej praktycznie w każdym zakątku Polski prowadzi się gospodarkę planową, która jest szczegółowo opisana. Dokładnie wiemy, co, gdzie i kiedy posadziliśmy. To jednak nie znaczy, że nie określa się nigdy wieku drzew, chociaż te badania wykorzystuje się zupełnie w innym celu niż li tylko obliczenie wieku drzew. Trafniej jednak byłoby używać

słowa »określenie« zamiast »obliczenie«. W lesie robi się to najczęściej tzw. świdrem Presslera bądź przy użyciu specjalnych tabel, w których na podstawie wysokości, pierśnicy (średnica drzewa na wysokości 1,3 m) oraz siedliska można odczytać średni wiek, który ktoś wcześniej w wyniku badań na dość dużej liczbie drzew pomierzył”. Wynika stąd, że powyższe zadanie nie opisuje rzeczywistego zastosowania matematyki w przyrodzie.

Słowa kluczowe: podstawa programowa, zadania matematyczne o treści przyrodniczej lub inspirowane przyrodą, eksperyment, czynnościowe nauczanie matematyki, wzór Simpsona, objętość bryły, siatka bryły.

Przypisy:

¹ Thomas Simpson (1710–1761) – angielski matematyk znany z opracowania w 1743 roku metody przybliżonego numerycznego obliczania całek oznaczonych (metoda Simpsona); zajmował się także trygonometrią i rachunkiem prawdopodobieństwa oprócz analizy matematycznej; zob. https://pl.wikipedia.org/wiki/Thomas_Simpson (dostęp: 29 I 2020).

² Leonardo z Pizy (ok. 1175–1250), znany jako Leonardo Fibonacci, włoski matematyk, który zasłynął m.in. z propagowania w Europie stosowania cyfr arabskich w zapisie liczb oraz z dzieł *Liber Abaci* z 1202 roku, poświęconej podstawom arytmetyki (system pozycyjny liczb) i *Practica geometriae* z 1220 roku, przedstawiającej połączenie algebry i geometrii; zob. <https://pl.wikipedia.org/wiki/Fibonacci> (dostęp: 29 I 2020); https://pl.wikipedia.org/wiki/Cyfry_arabskie (dostęp: 29 I 2020).

pl.wikipedia.org/wiki/Fibonacci (dostęp: 29 I 2020); https://pl.wikipedia.org/wiki/Cyfry_arabskie (dostęp: 29 I 2020).

Bibliografia:

- Braun M., Mańkowska A., Ptaszyńska M.: *Matematyka z kluczem. Podręcznik do klasy piątej szkoły podstawowej. Część II*. Warszawa: Nowa Era, 2018.
- Braun M., Mańkowska A., Ptaszyńska M., Wej K., Babiński W., Szmytkiewicz E., Janowicz J.: *Matematyka z kluczem. Podręcznik do klasy ósmej szkoły podstawowej*. Warszawa: Nowa Era, 2018.
- Ciesielski K.: *102 zadania dla małych, średnich i dużych sympatyków matematyki*. Kraków: Wydawnictwo Szkolne Omega, 2012.
- Kubat J., Marczewski T., Went W.: *Matematyka 4. Działam, więc umiem*. Warszawa: Wydawnictwo JUKA, 1999.
- Perelman J.: *Ciekawa geometria*. Warszawa: PZWS, 1953.
- Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla czteroletniego liceum ogólnokształcącego i pięcioletniego technikum. Załącznik nr 1 do Rozporządzenia MEN z dnia 30 stycznia 2018 r. w sprawie podstawy programowej... Dz.U. 2018, poz. 467.
- Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej. Załącznik 2 do Rozporządzenia MEN z dnia 14 lutego 2017 r. w sprawie podstawy programowej... Dz.U. 2017, poz. 536.
- Powązka Z.: *Matematyka i przyroda*. „Hejnał Oświatowy” nr 5/153/2016.



Tadeusz Marczewski jest nauczycielem konsultantem ds. edukacji matematycznej i zarządzania oświatą (wizja i misja szkoły, koncepcja pracy szkoły, zarządzanie zmianą, filozofia jakości pracy szkoły, ewaluacja, planowanie rozwoju szkoły) Małopolskiego Centrum Doskonalenia Nauczycieli.



Dr Zbigniew Powązka jest emerytowanym pracownikiem naukowo-dydaktycznym Uniwersytetu Pedagogicznego im. KEN w Krakowie. Był starszym wykładowcą w Katedrze Dydaktyki i Podstaw Matematyki UP w Krakowie.

Strategia nauczania przedmiotów przyrodniczych oparta o dociekanie naukowe

dr Robert Czuchnowski

Artykuł stanowi wprowadzenie do metodologii nauczania przedmiotów przyrodniczych opartego o dociekanie (odkrywanie) naukowe. Omówiono szczegółowo najbardziej efektywny w tej strategii 5-etapowy cykl nauczania i uczenia się oraz rozwijane umiejętności uczniów. Przedstawiono także podstawowe typy zajęć kształtujące różne poziomy samodzielności badawczej uczniów.

Panuje dość powszechne społeczne przekonanie, że nauczanie sprowadza się tak naprawdę do przekazywania szeroko rozumianej wiedzy, która ma pozwolić uczniom na osiągnięcie wysokich wyników na egzaminach. Jest to bardzo zachowawcze podejście, które już od blisko pół wieku przestało przystawać do rzeczywistości. Obserwujemy bowiem wyraźne przesunięcie punktu ciężkości z treści kształcenia na jego efekty, co zostało wymuszone przez konieczność sprostania wymogom kolejnych etapów edukacji, ale także przez zmieniający się rynek pracy.

Nowoczesne, innowacyjne nauczanie powinno przygotować ucznia do samodzielnego kierowania swoim rozwojem poprzez kształtowanie krytycznego i twórczego myślenia, rozwijanie umiejętności identyfikowania problemów i poszukiwania najlepszych rozwiązań. Zmianie ulega także rola samego nauczyciela. Z prostej funkcji przekazującego wiedzę staje się on raczej przewodnikiem swoich uczniów w ich procesie uczenia się. Obecnie istnieje stosunkowo łatwy dostęp do informacji, znacznie gorzej jest jednak z oceną ich wiarygodności bądź wykorzystaniem tych wiadomości dla wyjaśniania zjawisk otaczającego świata.

Chociaż wykonywanie doświadczeń i eksperymentów kojarzy się w powszechnej opinii z nauczaniem przedmiotów przyrodniczych (głównie w zakresie chemii czy fizyki, rza-

dziej biologii, a prawie w ogóle geografii) to w praktyce szkolnej staje się zazwyczaj tylko ilustracją dla przedstawianych treści. Przeważnie ogranicza się do pokazu nauczyciela, a rola uczniów jest sprowadzona jedynie do potwierdzenia zgodności wyników z wcześniej podanymi przez nauczyciela wiadomościami. Biorąc pod uwagę, że duża część doświadczeń w warunkach szkolnych „nie wychodzi”, to nawet ta funkcja wydaje się wątpliwa.

Alternatywą dla tak rozumianej roli doświadczeń i eksperymentów w dydaktyce przedmiotów przyrodniczych jest strategia nauczania oparta o dociekanie naukowe, gdzie aktywność jest głównie po stronie uczniów. W wielu krajach świata strategia IBSE (*Inquiry Based Science Education*), jako kształcenie promujące badawczą aktywność uczniów, to już standard dydaktyczny, ujęty w podstawach programowych (Maciejowska i Odrowąż, 2013).

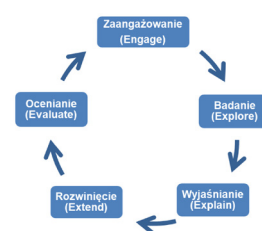
Nie jest to podejście całkowicie nowe także w Polsce. Znajdziemy je już w klasycznym podręczniku dydaktyki ogólnej Okonia (2003), który w grupie metod poszukujących jako sposób uczenia się ucznia podaje odkrywanie, a jako odpowiadającą mu postawę ucznia wymienia postawę badawczą. Tak rozumiane odkrywanie (dociekanie naukowe) to „celowy proces diagnozowania problemów, krytycznej analizy eksperymentów oraz dostrzegania alternatyw, planowania badań, sprawdzania przypuszczeń,

szukania informacji, konstruowania modeli, dyskusowania z rówieśnikami i formułowania spójnych argumentów” (Linn i in., 2004). Jest ono oparte wprost o konstruktywistyczny model dociekania naukowego (Llewellyn, 2002).

Obecnie w zapisach nowych podstaw programowych dla przedmiotów przyrodniczych, zarówno w szkołach podstawowych jak i ponadpodstawowych, znalazło się wiele sformułowań zalecających szerokie wprowadzanie metody badawczej do programów nauczania, a jest ona właśnie podstawowym elementem strategii nauczania przez odkrywanie (Czuchnowski i Paul, 2019).

5-etapowy cykl nauczania i uczenia się

W strategii IBSE najbardziej efektywnym modelem nauczania i uczenia się jest 5-etapowy cykl nazywany 5E (Llewellyn, 2002; Maciejowska i Odrowąż, 2013) od anglojęzycznych nazw etapów zaczynających się od litery e.



Rys. 1. 5-etapowy cykl nauczania-uczenia się w strategii IBSE

1. Zaangażowanie (Engage) – ten etap stanowiący część wprowadzającą lekcji uaktywnia proces uczenia się uczniów. Daje nauczycielowi możliwość pokazania szerszego kontekstu oraz wzbudzenia zainteresowania i zaciekawienia tematem. Jednocześnie uczniowie mogą dokonać oceny już posiadanej na dany temat wiedzy, dzielą się także swoimi wcześniejszymi doświadczeniami.
2. Badanie (Explore) – stanowi pierwszy element właściwej lekcji, podczas którego uczniowie samodzielnie lub w grupach formułują pytania badawcze, stawiają hipotezy i zajmują się zbieraniem danych (eksperymentalnych lub literaturowych). Jest to również etap wymiany obserwacji, uczniowie mogą przedyskutować pomiędzy sobą, co udało się zbadać, odkryć oraz czego się dowiedzieli w trakcie eksperymentów. W tej fazie lekcji nauczyciel obserwuje, ewentualnie motywuje ich do pracy.
3. Wyjaśnianie (Explain) – kolejny etap właściwej lekcji, gdy zdobyte na podstawie wykonanego badania informacje zostają przedyskutowane z nauczycielem. Dopiero teraz nauczyciel wyjaśnia podstawy naukowe i wprowadza pojęcia kluczowe dla pełnego zrozumienia zjawiska. Wyposaża jednocześnie uczniów w poprawną terminologię.
4. Rozwinięcie (Extend) – ostatni etap właściwej lekcji, podczas którego nauczyciel pomaga uczniom dokonać pełnego zintegrowania nowo zdobytej wiedzy dotyczącej badanego zjawiska. Pozwala to na rozszerzenie jej zastosowania na nowe sytuacje, odniesienie do ogólnych praw i zależności. Znacznie ułatwia to uczniom tworzenie uogólnień oraz weryfikację ich dotychczasowego rozumienia badanego zjawiska.
5. Ocenianie (Evaluate) – to etap podsumowania i rekapitulacji lekcji, który daje szansę na stawianie przez nauczyciela bardziej złożonych i otwartych pytań: „Dlaczego uważasz, że...? Jakiego masz na to dowody?”. Pomagają one uczniom dokonywać analizy i oceny własnej pracy oraz ocenić rozumienie przez

uczniów pojęć i zdobyte przez nich umiejętności.

Umiejętności rozwijane podczas dociekania naukowego

Wykorzystując strategię nauczania przedmiotów przyrodniczych opartą o dociekanie naukowe, stwarzamy uczniom możliwość rozwijania różnorodnych umiejętności i postaw. Dotyczy to nie tylko tych czysto badawczych, które znalazły odniesienie w aktualnych podstawach programowych dla wszystkich poziomów kształcenia, ale także szeregu kompetencji kluczowych, w tym także tych o charakterze miękkim, jak umiejętność zarządzania swoją pracą, zdolność motywowania i inspirowania siebie i innych, komunikacji i współpracy w grupie. Szczegółowe umiejętności badawcze rozwijane podczas dociekania naukowego umieszczono w tabeli 1, s. 26.

Typy zajęć opartych na dociekanii naukowym

W strategii nauczania opartego o dociekanie naukowe wyróżniono 5 podstawowych typów zajęć (Rys. 2). Uszeregowane według wzrastającej samodzielności badawczej uczniów i jednocześnie malejącej roli nauczyciela są to: pokaz interaktywny, odkrywanie z instrukcją, ukierunkowane dociekanie naukowe, ograniczone dociekanie naukowe, swobodne dociekanie naukowe (Bernard i in., 2012; Ellermeijer i in., 2013).

Pokaz interaktywny – to najczęściej stosowany typ zajęć z omawianej grupy, który polega na przeprowadzeniu pokazu eksperymentu przez nauczyciela lub wyznaczonego ucznia. Podczas pokazu nauczyciel powinien zadawać uczniom pytania odnośnie ich przewidywań – np. „Co się stanie?”, a także proponowanych wyjaśnień – np. „W jaki sposób to się stało?”. Pomaga im także, nie wyręczając ich, wyciągnąć wnioski w sposób poprawny naukowo.

Odkrywanie z instrukcją – to tradycyjna metoda pracy doświadczalnej w warunkach szkolnych, w której

uczniowie przeprowadzają eksperyment zaproponowany i opisany przez nauczyciela, postępując ściśle według instrukcji. Dużą rolę odgrywa tutaj wspólne omówienie wyników, w tym wskazanie przez uczniów przyczyn różnic w wynikach czy ewentualnych niepowodzeń.

Ukierunkowane dociekanie naukowe – to rzadziej stosowany typ zajęć, kiedy uczniowie wykonują w grupach swoje własne eksperymenty. Nauczyciel jedynie wskazuje problem i podaje cel eksperymentu, np. „Znajdźcie...”, „Ustalcie...”, a także proponuje standardową metodykę. Jednak sam eksperyment nie ma zadanego z góry wyniku, a wnioski oparte są wyłącznie na rezultatach pracy uczniów.

Ograniczone dociekanie naukowe – w tym typie zajęć rola nauczyciela ogranicza się do podania problemu badawczego, np. „Jak zasolenie gleby wpływa na kiełkowanie nasion”. Natomiast do uczniów należy samodzielne zaplanowanie i przeprowadzenie eksperymentu. Powinni także opracować jego wyniki i przygotować ich prezentację.

Swobodne dociekanie naukowe – ten typ zajęć wymagający największego nakładu pracy uczniów może być stosowany jako standard w pracach kół naukowych lub podczas realizacji projektów na konkursy przedmiotowe czy olimpiady. Stawia się tutaj na całkowitą samodzielność uczniów, tak w zakresie formułowania problemu badawczego, jak i stawiania hipotez, ustalania procedury badawczej przeprowadzenia eksperymentu, opracowania wyników i ich prezentacji.



Rys. 2. Typy zajęć opartych na dociekanii naukowym

Tabela. 1. Umiejętności badawcze uczniów rozwijane podczas dociekania naukowego (według Broś i in., 2013)

1.	Formułowanie pytań badawczych	- Identyfikacja pytań, które nadają się do badania naukowego. - Formułowanie hipotez.
2.	Planowanie badania naukowego w celu weryfikacji hipotezy	- Ustalenie zmiennych niezależnych, zależnych oraz kontrolowanych. - Znalezienie ewentualnych błędów w planie badań, wyznaczenie procedur bezpieczeństwa.
3.	Stosowanie odpowiednich narzędzi i technik w celu zebrania danych	- Wybór właściwej metodyki i standaryzacja pomiarów. - Porządkowanie obiektów, faktów ze względu na ich właściwości i stosowanie systemów klasyfikacji. - Konsekwencja i precyzja w zbieraniu danych.
4.	Analiza i opis danych	- Odróżnianie wyjaśnienia od opisu. - Wykorzystanie umiejętności matematycznych w analizie i interpretacji danych. - Identyfikacja związków i zależności pomiędzy zmiennymi. - Stosowanie odpowiednio dobranych form graficznej prezentacji danych.
5.	Wyjaśnianie wyników i wyciąganie wniosków	- Odróżnianie obserwacji od wnioskowania. - Proponowanie wyjaśnień opartych na obserwacji. - Stosowanie dowodów w celu wyciągnięcia wniosków i przewidywania trendów. - Formułowanie logicznych wyjaśnień na temat związków przyczynowo-skutkowych pomiędzy danymi.
6.	Akceptacja alternatywnych wyjaśnień lub hipotez	- Rozważanie alternatywnych objaśnień. - Rozpoznawanie błędnego rozumowania, nieopartego danymi.
7.	Prezentowanie procedur i wyjaśnień naukowych	- Prezentowanie procedur i metod badań. - Prezentowanie wiedzy uzyskanej z badań w formie ustnej oraz w formie pisemnych raportów poprawnie zilustrowanych wykresami.

Słowa kluczowe: strategia nauczania przedmiotów przyrodniczych, dociekanie naukowe.

Bibliografia:

- Bernard P., Białas A., Broś P., Ellermeijer T., Kędzierska E., Krzeczowska M., Maciejowska I., Odrowąż E. Szo-stak E.: *Podstawy metodologii IBSE*. [w:] *Nauczanie przedmiotów przyrodniczych kształtujące postawy i umiejętności badawcze uczniów*. Kraków: Uniwersytet Jagielloński, 2012.
- Broś P., Ellermeijer T., Kędzierska E., Krzeczowska M.: *Konsorcjum ESTABLISH: Umiejętności ucznia rozwijane podczas nauczania przez dociekanie/odkrywanie naukowe – podstawy teoretyczne*, [w:] Maciejowska I., Odrowąż E. (red.) *Nauczanie przedmiotów przyrodniczych kształtujące postawy i umiejętności badawcze uczniów, cz. 2*. Kraków: Uniwersytet Jagielloński, 2013.
- Czuchnowski R., Paul L.: *Nauczanie przez dociekanie naukowe w zapisach nowej podstawy programowej biologii dla liceum i technikum*. „Hejnał Oświatowy” nr 8–9/185/2019.
- Ellermeijer T., Kędzierska E., Maciejowska I., Odrowąż E.: *Konsorcjum ESTABLISH: Iwona Maciejowska I., Odrowąż E. (red.) Rola nauczyciela w XXI wieku*. [w:] Maciejowska I. i Odrowąż E. (red.), *Nauczanie przedmiotów przyrodniczych kształtujące postawy i umiejętności badawcze uczniów cz. 2*. Kraków: Uniwersytet Jagielloński, 2013.
- Linn, M. C., Davis, E. A., Bell, P. (Eds.): *Internet environments for science education*. London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 2004.
- Llewellyn D.: *Inquire within: implementing inquiry-based science standards*. California: Corwin Press, 2002.
- Maciejowska I., Odrowąż E. (red.): *Nauczanie przedmiotów przyrodniczych kształtujące postawy i umiejętności badawcze uczniów, cz. 2*. Kraków: Uniwersytet Jagielloński, 2013.
- Okoń W.: *Wprowadzenie do dydaktyki ogólnej*. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie ŻAK, 2003.



Dr Robert Czuchnowski – wykładowca w Wydziałowym Centrum Dydaktyki, Wydział Biologii Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie. Autor ponad 40 prac oryginalnych, przeglądowych i opracowań zbiorowych. Kierownik i współwykonawca kilku grantów krajowych i międzynarodowych, w tym projektu SAILS – Strategies for Assessment of Inquiry Learning in Sciences. Koordynator obszaru biologii w projekcie „Małopolska Chmura Edukacyjna – nowy model nauczania”.

Wspomnienia z matematycznych wędrówek po krainie wyobraźni i uczniowskich możliwości

Gabriela Dolińska

Artykuł zawiera przykłady zrealizowanych działań projektowych. Celem podstawowym tych działań było budowanie pozytywnego wizerunku matematyki, dobrych skojarzeń i emocji, dzięki którym może nastąpić rozbudzanie i rozwijanie u uczniów zainteresowań m.in. matematycznych.

Poniższy tekst to echo prezentacji przedstawionej przeze mnie w trakcie konferencji „Matematycznie zakręćni” z cyklu „Nauczycielskie pasje inspiracją dla ucznia” zorganizowanej 6 listopada 2019 roku przez MCDN Ośrodek w Krakowie. Wystąpienie nosiło tytuł *Uczniowie na matematycznych ścieżkach, czyli obserwujemy świat przez matematyczne okulary*. Zaprezentowałam wówczas efekty zrealizowanych pomysłów i projektów, czyli „matematyczne wędkę”, na które udawało i udaje mi się od wielu lat łowić uczniów, wciągać ich w wir rozmaitych działań na miarę ich możliwości. Podpowiadałam też jak i gdzie można szukać sprzymierzeńców dla swoich działań i wciąż czerpać radość z uczenia *strasznej matematyki*.

A wszystko zaczęło się w gimnazjum od prac krótko- i długoterminowych, a potem obowiązkowych projektów edukacyjnych... czyli zespołowych, planowanych działań uczniów, mających na celu rozwiązanie konkretnego problemu, z zastosowaniem różnorodnych form i metod.

W mojej szkole projekt edukacyjny realizował zespół uczniów pod opieką nauczyciela, a ich działania obejmowały:

1. wybór tematu,
2. określenie celów projektu i zaplanowanie etapów jego realizacji,
3. wykonanie zaplanowanych działań,
4. publiczną prezentację przez uczniów rezultatów projektu,
5. podsumowanie pracy uczniów nad projektem edukacyjnym.

Zachęcając uczniów do udziału w ma-

tematycznych działaniach projektowych w latach 2012–2019, musiałam się zmierzyć nie tylko ze stereotypami typu „matma jest trudna i nudna”, „ja nie umiem matematyki – mam ledwo 2”, ale również z wieloma problemami i dysfunkcjami u dzieci. Dysleksja, dyskalculia, nadpobudliwość psychoruchowa, deficyty uwagi, fobia szkolna, zaburzenia percepcji czy nieharmonijny roz-

snych kompetencji, niski poziom samodzielności i niska motywacja zadaniowa, słabe możliwości manualne... To tylko niektóre.

Lektura diagnoz oraz zaleceń w rosnącej lawinowo ilości opinii Poradni Psychologiczno-Pedagogicznych była bardzo obszerna i przytłaczająca. Również codzienna obserwacja dzieci i młodzieży nie dawała mi spokoju. Inspira-



Nocny Games Room, fot. G. Dolińska

wój funkcji poznawczych, utrudnione funkcjonowanie społeczne (m.in. brak współpracy w zespole, przestrzegania ustalonych zasad, terminów), sytuacyjne trudności emocjonalne, blokady (np. lęk przed wystąpieniem publicznym, odpowiedzialnością ustną, rozmową), trudności związane z obniżonym poczuciem wła-

cji do pracy szukałam m.in. na warsztatach i spotkaniach oraz w bogatej ofercie wydawniczej w trakcie oddziałowych i Krajowych Konferencji Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki (SNM) oraz w licznych kontaktach z innymi nauczycielami, a także przeglądając zasoby internetowe.

Z potrzeby wyzwania potencjału tkwiącego w bardzo młodych ludziach, czasem obarczonych różnymi problemami, powstawały ramy działań, które wypełniały się sugestiami, a potem powoli pomysłami dzieci i efektami ich pracy. Wielokrotnie dzięki szczęśliwym zbiegom okoliczności, wielu ludziom dobrej woli, rodzicom oraz sponsorom, dyrekcji szkoły przekraczaliśmy owe ramy, bariery, ograniczenia finansowe...

Jednym z pierwszych na większą skalę zrealizowanych projektów był Młodzieżowy Festiwal Nauki (2012). Nawiązałam kontakt z animatorami z Centrum Nauki Kopernik w Warszawie, którzy w ramach swojego projektu Klub Młodego Odkrywcę (KMO) przyjechali do naszej szkoły, przeprowadzili szkolenia dla nauczycieli z zaproszonych okolicznych szkół, przywieźli pomoce dla szkoły i pomogli nam uatrakcyjnić ten pierwszy festiwal. Wśród różnorodnych eksperymentów przyrodniczych prezentowanych przez grupy gimnazjalistów i uczniów szkół podstawowych, pokazów ratownictwa, sztuki decoupage lub programowania robotów w wykonaniu studentów UJ.

W jednej z sal dzieci układały tangramy o różnych kształtach (tradycyjny chiński oraz jajko Kolumba), rozwiązywały łamigłówki, a w innej z przedstawicielem Polskiego Towarzystwa Origami trenowały wyobraźnię podczas pracy przy kolorowych kartkach papieru. Dzięki animatorom z Kopernika mło-

dzień poznała m.in. ciekawą metodę przybliżania wartości liczby π metodą „igły Buffona”.

„Słyszałem i zapomniałem. Widziałem i zapamiętałem. Zrobiłem i zrozumiałem” (Konfucjusz).

2016 rok to przede wszystkim „odkrycie” przez uczniów iluzji optycznych i zachwyt „kształtami niemożliwymi”, sklejanie bryłek dla nich nietypowych (wielościenny gwiazdziste), bo wykraczających poza podstawę programową szkoły podstawowej i gimnazjum z matematyki. To był rok niezwykle pod wieloma względami. W grupach projektowych pracowałam wtedy z dziećmi o trudnościach opisanych na wstępie.

Efekty pracy zwłaszcza tych dzieci wprawiały w podziw gości na lekcjach otwartych prowadzonych przez nich oraz w trakcie wystaw, gdy prezentowali z bliskim w oku swoje sklejone wymyślne modele, bryły, przestrzenne puzzle, zagadki graficzne, filmy, prezentacje multimedialne. Śmiało już też odpowiadali na pytania obcych osób (przyszłych uczniów i ich rodziców) w trakcie Dni Otwartych Szkoły, gdzie również prezentowali swoje prace. Wiele z tych dzieł na stałe zagościło w mojej pracowni matematycznej i ożywa w odpowiednim czasie na lekcji. Kolejne roczniki uczniów lepiej reagują na prezentację (pracę) wykonaną przez rówieśnika lub starszego kolegę/koleżankę. Nakręcony filmik, prezentacja, łamigłówka, gra to nie tylko ciekawa pomoc dydaktycz-

na na lekcję, odpoczynek dla nauczycielskich strun głosowych, ale też przykład odwagi i pracowitości młodych ludzi, efekt ich poszukiwań, odkryć i interpretacji, również zachęta dla innych do wpływania na nieznane wody...

„To, co musiałeś odkryć samodzielnie, zostawia w Twoim umyśle ścieżkę, którą w razie potrzeby możesz pójść jeszcze raz” (Georg Christoph Lichtenberg).

W kolejnych latach 2017–2019 dla Stowarzyszenia Przyjaciół SP nr 8 w Trzebini BONA FIDE napisałam wnioski o granty i dotację do fundacji mBanku. Z ich wsparciem finansowym zrealizowałam z uczniami i dla uczniów cztery projekty popularyzujące matematykę:

1. „Trójka na matematycznych ścieżkach” (2017).
2. „Przyjemne z pożytecznym, czyli bawimy się matematyką” (2018).
3. „Matematyczne Okulary” (2019).
4. „Matematyka rekreacyjna” (2019).

W projekcie nr 1 szkołę odwiedzi-li niecodzienni goście, m.in. pracownicy AGH i UP w Krakowie z niezwykle ciekawymi, angażującymi młodzież wykładami o współczesnych zastosowaniach matematyki oraz o związkach matematyki z muzyką. Zaproszenie na spotkanie z młodzieżą przyjął również wielokrotny mistrz Polski i świata w sudoku – opowiedział o swoich związkach z matematyką (jest architektem), podróżach po świecie, turniejach, udziale w programach tv. Na koniec poprowadził warsztaty z rozwiązywania m. in. sudoku.



Rodzinną Nocną Gra Matematyczną, fot. B. Ubik

W projekcie 1. i 2. uczniowie wyjeżdżali do krakowskich uczelni wyższych na popołudniowe wykłady popularyzujące matematykę organizowane przez Krakowskie Młodzieżowe Towarzystwo Przyjaciół Nauk i Sztuk Centrum Młodzieżowego im. dr. H. Jordana przy współpracy z krakowskim oddziałem PTM. Młodzież odwiedziła ze mną m.in. interaktywne muzeum UJ, uczestniczyli w wycieczce edukacyjnej śladami Kopernika oraz brali udział w zajęciach tematycznych z matematyki tam organizowanych. Zakupiliśmy również gry i łamigłówki do pracowni przedmiotowej. Gimnazjaliści zrobili wówczas po 45 kompletów pentomino i tangramów dla młodszych uczniów, makiety 3D jako plansze do gier matematycznych na dowolny temat. Na zakończenie projektu przygotowałam I Nocną Drużynową Grę Matematyczną, która okazała się hitem naszego spotkania i na życzenie dzieci musiała się znaleźć w każdym następnym projekcie pisanym przeze mnie. Zrobiliśmy już trzy takie gry, m.in. w projekcie 4.

Oczywiście dzięki pozyskaniu funduszy mogliśmy pozwolić sobie na nagrody dla uczestników, sędziów i pomocników w projekcie. Podkreślę tu, że starsza młodzież chętnie angażowała się w działania dla młodszych, wykonywanie prostych pomocy do pracowni, sędziowanie konkurencji w nocnej grze, opiekę i pomoc w logistyce przy większych imprezach. Oddałam im również (oczywiście w ramach posiadanych funduszy) głos w sprawie nagród – sami wybrali pewne uniwersalne i satysfakcjonujące ich rozwiązania, tj. karty prezentowe lub bilety do popularnego parku rozrywki.

Na wniosek dzieci i młodzieży powtarzałam w kolejnych projektach te działania, które wskazywali jako atrakcyjne. Były to popołudniowe wyjazdy na wykłady oraz II i III Nocna Rodzinna Drużynowa Gra Matematyczna z nagrodami. Były także m.in: strefa duchów matematycznych (kapitałne stroje w stylu bogów greckich!), matematyczny *escape room*, ukryte na korytarzach w koperkach zadaniach oraz kodowane przy pomocy QR kodów, drużynowe rozgrywki w matematyczne planszówki, płaskie i przestrzenne puzzle, odbicia lustrzane, zagadki, zadania, konkuren-

cje... wszystkie stanowiska sędziowane i nadzorowane przez uczniów z grup projektowych. Dzięki wyjazdowi na Matematyczną Małopolską Noc Naukowców (wielokrotnie) męska część drużyny projektowej złożona z uczniów kl. 8. i kl. 3. gimnazjum rozgrywała zasady symulacyjnej gry giełdowej i... opracowała własną. Prostsza, bo dostosowaną do uczniów kl. 4–6 SP.

Celem podstawowym działań projektowych było budowanie pozytywnego wizerunku matematyki

Przeprowadzili ją też potem z powodzeniem na naszej II Nocnej Grze. Wspomnę także, że sami również wymyślili, zorganizowali i fachowo przeprowadzili konkurs o tytuł Szkolnego Mistrza Kostki Rubik. Moja rola ograniczyła się wówczas do symbolicznego sprawowania opieki i uroczystego wręczenia nagród. Oczywiście włączaliśmy się też w inne akcje edukacyjne, np. ŚDTM – Światowy Dzień Tabliczki Mnożenia. Z okazji Jubileuszowego Roku Matematyki powstał projekt nr 3, czyli powiatowy konkurs matematyczny. Zaprosiliśmy szkoły do udziału w niezwykłym obserwowaniu świata przez „matematyczne okulary” oraz do stworzenia prac w jednej z pięciu kategorii na temat wszechobecności i użyteczności matematyki wokół nas. Konkurs zakończył się uroczystą galą z wręczeniem nagród, wystawą i pokazem dzieł młodych obserwatorów świata. Były matematyczne filmy, zdjęcia, plakaty, infografiki, wiersze i piosenki. Część tych prac podziwiali w listopadzie uczestnicy konferencji MCDN Ośrodek w Krakowie.

Tych moich „wędek” rozmaitych było jeszcze więcej, nie wszystkie dały tak spektakularne efekty aktywności uczniowskiej.... Z radością i dumą słucham uczniów i absolwentów, którzy mówią: „Wie pani, ta matma to wcale taka straszna nie jest”; „Fajnie się bawiliśmy”; „Zrobimy coś jeszcze?”; „Kiedy robi Pani następny projekt?”

„Matematyka jest delikatnym kwiatem, który rośnie nie na każdej glebie i zakwita nie wiadomo kiedy i jak” (Jean Fabre).

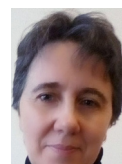
Powiedziałabym, że nauka i nauczanie matematyki to ciężka praca, wymagająca cierpliwości, wytrwałości i pomysłowości opieka nad delikatnym kwiatem, który rośnie nie na każdej glebie, ale trzeba mieć nadzieję, że zakwitnie, choć nie wiadomo jak i kiedy...

Znajdźmy przestrzeń do rozmowy z dziećmi i młodzieżą, oddajmy im głos, a opowiedzą nam, jak widzą i odbierają świat, otaczającą nas rzeczywistość – nie tylko przez matematyczne okulary. Dyskretnie nad nimi czuwając, wprowadzimy ich niepostrzeżenie w niezwykle świat pięknych obiektów i struktur matematycznych i... w życie. Uczniowie podejmą z nami dialog, zaczną zadawać pytania, dzielić się swoimi spostrzeżeniami i wnioskami, nie podejrzewając, że oto zaczęli samodzielnie myśleć, kojarzyć fakty, dostrzegać analogie i podawać argumenty dla swoich racji, zmierzając na przykład w kierunku trudnej i „strasznej” sztuki dowodzenia w rozumowaniach matematycznych i... żeglując ku dojrzałości.

Słowa kluczowe: matematyka, działania projektowe z matematyki.

Bibliografia:

- Pawlikowski P.: *W krainie wielościannów. Zrób sobie bryłkę*. Opole: Wydawnictwo NOWIK, 2009.
- Sieńkowski K.: *Przygoda z niemożliwymi kształtami*. Opole: Wydawnictwo NOWIK, 2010.
- 100 najlepszych iluzji optycznych* (100 kart z optycznymi złudzeniami oraz wyjaśniającymi je tekstami). Gra planszowa. Wydawca i dystrybutor G3.
- Zasoby internetowe.



Mgr Gabriela Dolińska – doradca metodyczny z matematyki dla szkół podstawowych MCDN Ośrodek w Oświęcimiu. Od 25 lat nauczycielka matematyki w gimnazjum, a obecnie w Szkole Podstawowej nr 8 im. Jana Pawła II w Trzebini. Autorka innowacji i programu „Matematyka z elementami ekonomii”. Autorka i realizatorka wielu projektów edukacyjnych popularyzujących matematykę wśród dzieci i młodzieży.

Ze wstęgą Möbiusa na II Małopolskich Dniach Rodziny

Tadeusz Marczewski

Wstęga Möbiusa to przestrzenna figura geometryczna o ciekawych właściwościach znanych matematykom. Przydała się ona znacząco także ekologom. Niniejszy artykuł poświęcony jest nie tylko interesującym, pouczającym warsztatom, prowadzącym do zrozumienia istoty tej figury i odkrycia jej podstawowych własności, ale także ukazaniu jej związku z ekologią.

W 2019 roku Małopolskie Centrum Doskonalenia Nauczycieli wzięło udział w II Małopolskich Dniach Rodziny zorganizowanych przez Samorząd Województwa Małopolskiego. W ramach tego wydarzenia nauczyciele konsultanci Ośrodka w Krakowie uczestniczyli w krakowskim parku Jordana w całodziennym pikniku o charakterze kulturowo-edukacyjnym. Dla zainteresowanych młodszymi i starszymi dziećmi oraz towarzyszącym im dorosłym, rodzicom, czy też opiekunom przygotowałem różne ciekawe zajęcia matematyczne, zależnie od wieku czy zainteresowań. Nie były to dowolne problemy matematyczne, bo motywem przewodnim pikniku była ekologia. Furorę zarówno wśród dzieci, jak i dorosłych zrobiły zajęcia wokół wstęgi Möbiusa.

Wstęga Möbiusa i ekologia? Ależ tak. Jednym z najbardziej rozpoznawalnych ekologicznych piktogramów jest ikona recyklingu. Jej projekt bazuje właśnie na tej figurze. Ikonę tę stworzył 23-letni amerykański student Gary Anderson. W 1970 roku pewna amerykańska korporacja, lider w dziedzinie grafiki i designu korporacyjnego, ogłosiła konkurs na projekt znaku graficznego, który miał być umieszczany na papierowych produktach z recyklingu i wyrażać zarazem zaangażowanie producenta tych materiałów w ochronę środowiska. Konkurs miał uświetnić znaczące ekologiczne wydarzenie, pierwszy w historii Dzień Ziemi zaplanowany na 22 kwietnia 1970 roku. Projekt Andersona okazał się zwycięskim wśród pięciuset prac zgłoszonych na konkurs. Dziś uznaje się, że zwycięska ikona przyczyniła się zna-



Rys. 1. Źródło: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/44/Recycle001.svg>

cząco do wsparcia rozwoju globalnego recyklingu (ta ikona wraz ze znakiem Coca Coli i symbolem korporacji obuwniczo-odzieżowej Nike zalicza się do najbardziej rozpoznawalnych na świecie znaków graficznych)¹.

Anderson w konstrukcji ikony wykorzystał trzy strzałki². Wplótł je w obszar trójkąta. Strzałki są nie byle jakie, bo górna i prawa wychodzą jakby spod powierzchni, a lewa wchodzi pod spód. Zdają się generować nieskończoną zmianę. Po latach Anderson wyjawiał Penny Jones, specjalistce ds. edukacji w zakresie recyklingu w New Jersey w USA, współautorce wykorzystywanego przez mnie artykułu (Jones, Powell, 1999), istotę założeń konstrukcyjnych: „(...) postać [znaku] była zaprojektowana jako wstęga Möbiusa symbolizująca ciągłość w ramach skończonego podmiotu. (...) chciałem zasugerować zarówno dynamikę (rzeczy zmieniają się) i statykę (...) stały rodzaj rzeczy”³. To istota recyklingu: materiał ten sam, a wyrabiane z niego produkty – ciągle nowe. Anderson do graficznego zakomunikowania tej myśli wykorzystał wstęgę Möbiusa, którą zapewne poznał w czasie wysłuchanych na studiach wykładów z topologii (dziedzina matematyki), zaprezen-

towanej w formie dla nie matematyków.

Figurę geometryczną, która stała się podstawą konstrukcji ikony recyklingu, odkrył w czasach nowożytnych, a dokładniej w 1858 roku niemiecki matematyk Möbius⁴ jako przykład jednostronnej powierzchni. Ponieważ kształtem przypomina wstęgę, to utarło się wśród matematyków, że jest nazywana wstęgą Möbiusa. Utarło się, bo odkrył ją równocześnie (również w 1858 roku) i zarazem niezależnie inny niemiecki matematyk – Johan Benedict Listing⁵ (1808–1882). Jednak wstęga prawdopodobnie była znana już w starożytności. W muzeum sztuki Glyptotheka w Monachium przechowywana jest rzymska mozaika z III wieku n.e.⁶, na której dostrzec można obiekt, który wydaje się, że ma kształt wstęgi Möbiusa.

Figury geometrycznej zwanej wstęgą Möbiusa nie poznają uczniowie ani w szkole podstawowej, ani w szkole ponadpodstawowej. Aby moim słuchaczom, na wspomnianym we wstępie pikniku, umożliwić poznanie tej figury, przygotowałem serię zadań przedstawiających opisową definicję tej wstęgi oraz podstawowe jej własności. Jako strategię ich uczenia się wybrałem strategię doświadczalnego uczenia się według Kolba, wplatając w nią metodę czynnościowego nauczania-uczenia się matematyki z wykorzystaniem dwóch rodzajów upogłdowień: enaktywnego (praca na konkretnie) i ikonizacyjnego (rysunki na slajdach prezentacji). Uczestnicy moich warsztatów, manipulując paskami papieru, dokonywali obserwacji, które pozwalały im dostrzec istotne cechy badanej figury. Mogli zrozumieć jej istotę i mówili o niej na tyle dużo, że ten

komunikat można było uznać za opisową definicję poznawanej figury (której zresztą nie wymagałem). Uczestnicy poznawali ją i pogłębiali wiedzę o niej w kolejnych eksperymentach.

Oto seria zadań, które uczestnicy zaczęli wykonywać wraz z obserwacjami/hipotezami, które mogli poczynić (ich liczba była zależna od wieku i związana z zaciekawianiem go matematyką):

1. Sklej taśmą klejącą końce prostokątnego paska papieru, przekraczając jeden z końców na półobrotu. Czy otrzymałeś figurę płaską czy przestrzenną? Figura, którą otrzymasz to wstęga Möbiusa.

Otrzymujemy figurę przestrzenną. Są dwa typy wstęgi Möbiusa – można bowiem koniec paska przekręcać w lewo i prawo. Oba typy mają te same podstawowe własności.

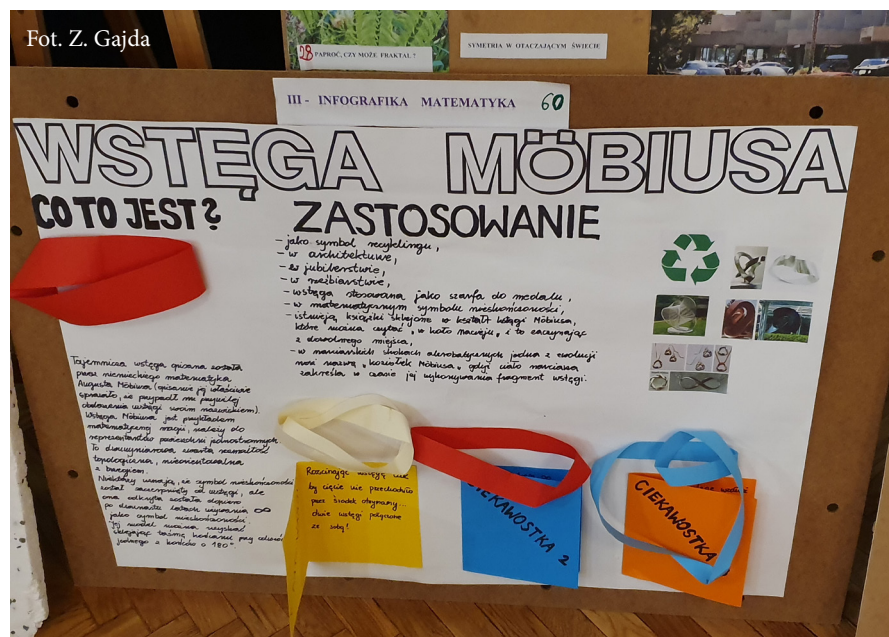
2. Ile stron ma otrzymana wstęga? Zaznacz pu nkt gdzieś na środku wstęgi i ciągnij długopisem lub ołówkiem linię, utrzymując jej środkowe położenie. Do czego doszedłeś?

Ciągnięta linia dochodzi do wyjściowego punktu, przechodząc wcześniej pod tym punktem. Wstęga Möbiusa ma zatem jedną stronę. Natomiast prostokątny pasek papieru, z którego zrobiliśmy wstęgę, miał dwie strony. Zwróćmy jeszcze uwagę, że ciągnięcie linii można kontynuować w nieskończoność, przechodząc za każdym razem przez wyjściowy punkt. To z tej własności skorzystał Anderson, projektując ikonę recyklingu.

3. Kolejne zadanie sprawdzało zrozumienie istoty poznanej figury. Przeanalizuj ilustrację⁷. Czy ilustrator zaprogramował na niej bezpieczny ruch samochodów, czy też ich kolizję?



Rys. 2. Gusiew I. E.: Uwlekatielnaja nauka. Matie-matika, Moskwa 2017, str. 96.



4. Jaką długość ma linia, którą narysowaliśmy przez środek wstęgi? Aby to stwierdzić, przetnij sklejenie i oceń, jak długa jest linia, którą poprzednio narysowaliśmy.

Długość wstęgi Möbiusa to podwojenie długości paska papieru, z którego sklejiliśmy wstęgę.

5. Ile krawędzi (brzegów) ma ta wstęga? Odpowiedź znajdziesz, po wyklejeniu brzegu papieru cenówkami (etykiety do metkownicy). Pamiętaj, by oklejać krawędź papieru z obu stron (jakbyś malował cenówkami tę krawędź).

Wstęga Möbiusa ma tylko jedną krawędź (jeden brzeg). Linia krawędzi jest linią zamkniętą.

6. Przetnij nożyczkami wstęgę wzdłuż przez środek. Czy otrzymałeś dwie wstęgi Möbiusa? A co otrzymałeś?

Do tej pory, kiedy przecinałeś coś na pół, otrzymywałeś dwie połówki. Tym razem, tnąc wstęgę na pół, nie otrzymaliśmy dwóch połówek (dwóch wstęg), a tylko jedną figurę. To obręcz z łatwo dostrzegalnymi dwoma skręceniami i na dodatek to nie wstęga Möbiusa, bo ta obręcz ma dwie strony (jak to sprawdzisz?).

7. Poprzednio otrzymaną skręconą obręcz przetnij wzdłuż przez jej środek. Co otrzymałeś? Sprawdź, ile stron ma każda z otrzymanych figur.

Otrzymujemy dwie nierozłącznie przeplecione obręcze, z których żadna nie jest wstęgą Möbiusa. Na każdej z tych dwóch obręczy można dostrzec skręcenia paska (ilukrotnie?).

8. Nową wstęgę Möbiusa przetnij wzdłuż, ale nie przez środek, a w odległości od brzegu równej jednej trzeciej szerokości wstęgi. Co otrzymałeś?

Dwie nierozłącznie przeplecione obręcze. Węższa i krótsza to wstęga Möbiusa o długości równej wyjściowej wstędze. Ta dłuższa obręcz nie jest wstęgą Möbiusa. Jej długość jest dwukrotnością długości rozcinanej wstęgi. Widoczne są na niej dwa skręcenia paska.

Z niektórymi uczestnikami zajęć rozmawiałem o pracy domowej:

1. Stwierdziłeś na pikniku, że długość linii narysowanej przez środek paska tworzącego wstęgę Möbiusa była dwukrotnością długości paska papieru, z którego sklejałeś wstęgę. Dowiedziałeś się też, że ma ona jedną tylko krawędź (brzeg). Sklej z prostokątnego paska papieru wstęgę Möbiusa i stwierdź, jaką długość ma ta jej jedyna krawędź. Jak to zbadasz?
2. Kiedy na pikniku przecinaliśmy wzdłuż wstęgę Möbiusa w odległości jednej trzeciej od jej krawędzi, to zwracaliśmy uwagę na długość otrzymanej wstęgi i obręczy, ale nie ocenialiśmy ich szerokości. Sprawdź jak się one mają do szerokości rozcinanej wstęgi.
3. Skoro zacząłeś oceniać szerokość wstęgi Möbiusa, to spróbuj ocenić jakie ma ona pole powierzchni? Jak ma się ono do pola prostokątnego paska papieru, z którego tę wstęgę utworzyłeś?
4. Na pikniku wstęgę Möbiusa otrzymałeś sklejając taśmą klejącą końce pro-

stokątnego paska papieru po wykonaniu półobrotu jednego z końców paska. Sklej kolejno nowe wstęgi z prostokątnych pasków papieru, dokonując najpierw pełnego obrotu jednego z końców paska, następnie półtora obrotu, a potem dwóch obrotów, trzech obrotów. Czy otrzymane wstęgi to powierzchnie jednostronne? Spróbuj w przypadku każdej z nich wykonać kilka z ćwiczeń, analogicznych do tych, które wykonywałeś na pikniku.

Słowa kluczowe: ekologia, ikona recyklingu, wstęga Möbiusa, własności wstęgi Möbiusa, metoda czynnościowa nauczania matematyki.

Przypisy:

¹ Gary Dean Anderson, ur. w 1947 roku w Honolulu na Hawajach. W latach 1966–1970 studiował architekturę. W czasie studiów poznawał także grafikę, filozofię, teorię informacji, zetknął się także z matematyczną topologią, wykładaną dla niematematyków. Jest wpływowym grafikiem i architektem. Zasłynął jako projektant symbolu recyklingu (w 1970 roku). Wniósł także znaczący wkład w dziedzinie planowania urbanistycznego i rozwoju obszarów miejskich. [https://en.wikipedia.org/wiki/Gary_Anderson_\(designer\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Gary_Anderson_(designer)) (dostęp: 15 I 2020).

² Ikona recyklingu występuje w różnych po-

staciach – czasem strzałki przedstawiają tylko czarne ich kontury, a czasami są one także wypełnione zielonym kolorem.

³ “The figure was designed as a Mobius strip to symbolize continuity within a finite entity. I used the [logo’s] arrows to give directionality to the symbol. I envisioned it with the small edge or the point of the triangle at the bottom. I wanted to suggest both the dynamic (things are changing) and the static (it’s a static equilibrium, a permanent kind of thing). The arrows, as broad as they are, draw back to the static side”; źródło: https://logoblink.com/img/2008/03/recycling_symbol_garyanderson.pdf (dostęp: 15 I 2020).

⁴ August Ferdinand Möbius, niemiecki geometra i astronom, który żył w latach 1798–1868. Jeden z twórców nowoczesnej geometrii algebraicznej. Pionier topologii. Znany z odkrycia tzw. wstęgi Möbiusa, przykładu dwuwymiarowej powierzchni, która ma jedną stronę, gdy jest rozważana jako figura przestrzeni trójwymiarowej; https://pl.wikipedia.org/wiki/August_Ferdinand_Möbius (dostęp: 15 I 2020); https://de.wikipedia.org/wiki/August_Ferdinand_Möbius (dostęp: 15 I 2020).

⁵ https://de.wikipedia.org/wiki/Johann_Benedict_Listing (dostęp: 15 I 2020).

⁶ https://en.wikipedia.org/wiki/Möbius_strip#/media/File:Aion_mosaic_Glyptothek_Munich_W504.jpg (dostęp: 15 I 2020).

⁷ I. E. Gusiew: *Uwlekatielnaja nauka. Matematika*, Moskwa: Izdatelstwo AST, 2017, s. 96.

Bibliografia:

- Gusiew I. E.: *Uwlekatielnaja nauka. Matematika*. Moskwa: Izdatelstwo AST, 2017.
- Jones P., Powell P.: *Gary Anderson has been found!* Resource Recykling, May/1999; https://logoblink.com/img/2008/03/recycling_symbol_garyanderson.pdf (dostęp: 15 I 2020).

Netografia:

- https://de.wikipedia.org/wiki/August_Ferdinand_Möbius (dostęp: 15 I 2020).
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Gary_Anderson_\(designer\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Gary_Anderson_(designer)) (dostęp: 15 I 2020).
- https://de.wikipedia.org/wiki/Johann_Benedict_Listing (dostęp: 15 I 2020).
- https://en.wikipedia.org/wiki/Möbius_strip#/media/File:Aion_mosaic_Glyptothek_Munich_W504.jpg (dostęp: 15 I 2020).



Tadeusz Marczewski jest nauczycielem konsultantem ds. edukacji matematycznej i zarządzania oświatą (wizja i misja szkoły, koncepcja pracy szkoły, zarządzanie zmianą, filozofia jakości pracy szkoły, ewaluacja, planowanie rozwoju szkoły) Małopolskiego Centrum Doskonalenia Nauczycieli.

Rola doświadczeń w rozumieniu chemii

Grzegorz Hudziak

Eksperymenty są częścią lekcji, która zwykle najbardziej interesuje uczniów. Mogą wówczas zobaczyć efekty przemian chemicznych, o których uczą się na zajęciach, zaobserwować pewne charakterystyczne cechy substancji, czy też mieć możliwość nauczania się, jak posługiwać się szkłem i sprzętem laboratoryjnym.

Chemia jest nauką eksperymentalną – obserwacje pewnych zjawisk, prawidłowości i formułowanie wniosków z nich płynących są jej nieodłącznym elementem. Podczas studiowania nauk chemicznych ważną formą zajęć są ćwiczenia laboratoryjne. Uczą one nie tylko znajomości technik laboratoryjnych, czy też pracy ze specjalistycznym sprzę-

tem. Przede wszystkim pomagają rozwijać zdolności polegające na projektowaniu eksperymentu, planowaniu jego przebiegu, formułowanie wniosków na podstawie analizy wyników i ich interpretacji.

Zajęcia laboratoryjne cieszą się również największym zainteresowaniem wśród studentów. Wynika to m.in. z faktu, że doświadczalnie mogą zba-

dać to, o czym uczyli się na wykładach i ćwiczeniach tablicowych. Zawsze najczęściej zapamiętuje się z zajęć praktycznych, gdzie można było zobaczyć i dotknąć różnych elementów. Przygotowywało to również stopniowo do prowadzenia własnych badań, których zwieńczeniem była praca magisterska.

W szkołach niestety nie ma podziału zajęć na wykłady, ćwiczenia i laborato-



Fot. M. Grewenda

rium, chemia jest realizowana w określonej przez ustawy siatkę godzinową na każdym etapie edukacyjnym, to też wszystkie te formy muszą być zamknięte w ramach 45-minutowych lekcji. Zajęcia laboratoryjne ponieważ zastępuje wykonywanie doświadczeń na lekcjach, czy to przez nauczyciela, czy też przez samych uczniów pod opieką prowadzącego zajęcia.

Eksperymenty są częścią lekcji, która zwykle najbardziej interesuje uczniów. Mogą wówczas zobaczyć efekty przemian, o których uczą się na zajęciach, zaobserwować pewne charakterystyczne cechy substancji chemicznych, czy też mieć możliwość nauczenia się, jak posługiwać się szkłem i sprzętem laboratoryjnym. Pomaga to również w zapamiętywaniu pewnych zagadnień.

Prosty przykład – barwy wskaźników kwasowo-zasadowych. W szkole zawsze jest informacja, że oranż metylowy barwi roztwór o odczynie kwasowym na czerwono, zaś w roztworach obojętnych i zasadowych na pomarańczowo. Można te informacje podawać na lekcjach, nakazać uczniom zanotowanie w zeszycie i zapamiętanie, jednak o wiele lepsze efekty przynosi prosty pokaz. Uczeń, gdy zobaczy efekt eksperymentu, o wiele lepiej jest w stanie przyswoić tę informację, a potem ją powtórzyć.

Obecnie, w podstawie programowej, która weszła w życie do szkół średnich z początkiem roku szkolnego 2019/2020, kwestię doświadczeń chemicznych zawiera w sobie trzecie z wymagań ogólnych zarówno dla programu podstawowego, jak i rozszerzonego. W szczególności – cytując za dokumentem – uczeń:

- bezpiecznie posługuje się sprzętem

laboratoryjnym i odczynnikami chemicznymi,

- projektuje i przeprowadza doświadczenia chemiczne, rejestruje ich wyniki w różnej formie, formułuje obserwacje, wnioski oraz wyjaśnienia,
- stawia hipotezy oraz proponuje sposoby ich weryfikacji,
- przestrzega zasad bezpieczeństwa i higieny pracy.

Sama idea jest słusza. Uczeń, który wiąże swoją przyszłość ze studiowaniem nauk przyrodniczych, powinien mieć już przyswojone pewne podstawowe umiejętności co do posługiwania się odpowiednimi narzędziami w laboratorium, jak i również pewne umiejętności w zakresie analizowania tego, co zaobserwował i wyciągania odpowiednich wniosków i sformułowań. Nie zawsze jednak są do tego pełne możliwości realizacji. Nie wszystkie szkoły dysponują pracowniami chemicznymi, czy też posiadają nawet niewielkie zaplecze chemiczne. Jest to dość problematyczne, mając na uwadze ilość doświadczeń zawartych w podstawie, które uczeń powinien wykonać/zobaczyć (36 dla poziomu podstawowego i 47 dla poziomu rozszerzonego).

W obecnych czasach jest jednak możliwość rozwiązania tego problemu. Wydawnictwa obecnie udostępniają różne multimedia, w tym również filmy przedstawiające przebieg pewnych doświadczeń chemicznych. Jest to dobre rozwiązanie nawet dla szkół posiadających zaplecze chemiczne – przede wszystkim w kwestii eksperymentów, które ze względu na wykorzystanie lub powstające w wyniku reakcji substancje chemiczne mogą być niebez-

pieczne. Nie zmienia to jednak faktu, że najlepiej, jeśli uczeń może sam zobaczyć na żywo pewne zjawiska lub nawet po prostu substancje chemiczne, np. związki metali bloku d, które przyjmują różne barwy w zależności od stopnia utlenienia metalu. W miarę możliwości dobrym rozwiązaniem jest samodzielna praca ucznia pod opieką nauczyciela. Często może być ona realizowana w mniejszych zespołach kilkusobowych. Bardzo w tym aspekcie pomaga podział klasy na grupy, jednak nie zawsze jest to możliwe.

Czasami dobrze jest zwrócić uwagę uczniom na możliwość przeprowadzenia pewnych doświadczeń chemicznych samodzielnie w domu. Przykładem niech będzie próba jodokrobia. Płyn lugola lub jodynę można nabyć w aptece, uczeń sam w domu może sprawdzić, które z próbek żywności zawierają skrobię, znając efekt pozytywnego wyniku tej próby.

Sam opis doświadczeń chemicznych w pewnych aspektach nawiązuje do tego, z czym uczniowie zetkną się podczas studiów na zajęciach laboratoryjnych. Zwykle elementy eksperymentu to: tytuł doświadczenia, schemat lub przebieg, zanotowanie obserwacji, wniosków oraz zapis zachodzących równań reakcji. W pewnym sensie uczniowie, opisując w ten sposób doświadczenie, tworzą swoistego rodzaju sprawozdanie z laboratorium. Oczywiście opis doświadczenia nie jest tak rozwinięty jak prace, które składają studenci, niemniej stanowi on przyczynek do sprawozdania.

Doświadczenia są zatem niezbędnym elementem, potrzebnym do zgłębiania tajników nauk takich jak chemia lub fizyka. W miarę możliwości uczeń powinien mieć możliwość przynajmniej zobaczenia pewnych zjawisk.

Słowa kluczowe: chemia, doświadczenia chemiczne.



Grzegorz Hudziak – absolwent Politechniki Krakowskiej, od 2010 roku nauczyciel chemii w I Liceum Ogólnokształcącym im. B. Nowodworskiego w Krakowie.

Matematycznie zakręcenii, czyli o nauczaniu matematyki z pasją

Halina Pulchny

6 listopada 2019 roku Małopolskie Centrum Doskonalenia Nauczycieli Ośrodek w Krakowie zorganizowało, jak co roku, konferencję z cyklu *Nauczycielskie pasje inspiracją dla ucznia*. Z okazji obchodów Jubileuszowego Roku Matematyki konferencja była dedykowana nauczycielom matematyki i nosiła tytuł: „Matematycznie zakręcenii”.

Mottem przewodnim konferencji były słowa Stanisława Brzozowskiego: „Wy nie wiecie, co to jest matematyka! Wy myślicie: liczby, liczby! Nie! A ona śpiewa, gra jak kryształ. Cała dusza tonie w dźwięcznym, przejrzystym kryształ”. Celem spotkania było ukazanie wpływu nauczycielskich pasji na rozwój ucznia.

Zaproszono pięciu „matematycznie zakręconych” prelegentów z Małopolski. To matematycy z pasją, którzy mają uznany dorobek w zakresie popularyzacji matematyki i zjednywania do niej nie tylko młodych ludzi. Swoją postawą sprawiają, że uczniowie chcą za nimi podążać i się rozwijać. Są praktykami, którzy kochają matematykę i kochają uczniów. Potrafią swoją wiedzę przekazać w taki sposób, by uczniowie mieli poczucie sensu nauki i z niecierpliwością czekali na kolejne zajęcia.

Konferencja spotkała się z dużym zainteresowaniem nauczycieli matematyki ze wszystkich etapów edukacyjnych. Uroczystego otwarcia konferencji dokonał dr Łukasz Cieślík, dyrektor Małopolskiego Centrum Doskonalenia Nauczycieli. Prelegenci w swoich wystąpieniach, poszukiwali odpowiedzi na pytania: Jak poprawić społeczne postrzeganie matematyki? Jak skutecznie motywować uczniów do nauki? Jakie podjąć działania, aby rozwijać inicjatywę, kreatywność, zaangażowanie zarówno uczniów jak i nauczycieli?

Dlaczego matematyka?

Dr Zdzisław Pogoda wykładowca w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Ja-

giellońskiego i profesor nadzwyczajny w Państwowej Wyższej Szkole Zawodowej w Nowym Sączu sformułował tezę: „Ucząc matematyki, czy ją wykładając, musimy być przekonani, że warto. Nauczyciel lub wykładowca powinien mieć silną motywację i argumenty”. W czasie wykładu zaprezentował wiele ciekawych, zaskakujących argumentów, dla których warto nauczać i uczyć się matematyki.

Fraktal na stulecie, czyli projekt o kodowaniu, kombinatoryce i szeregach

Dr Anna Widur, przewodnicząca Komisji Popularyzacji Matematyki i Współpracy ze szkolnictwem Oddziału Krakowskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego, opowiedziała o realizacji autorskiego projektu „Fraktal na stulecie”. We wspólnej zabawie polegającej na ułożeniu ósmego etapu konstrukcji Trójkąta Sierpińskiego na Krakowskich Błoniach wzięło udział ok. 6,5 tys. uczniów z całej Małopolski. Trójkąt utworzyli uczniowie, którzy stali tak względem siebie, że z góry był widoczny kształt fraktala. W trakcie wykładu nauczyciele wykonywali zadania praktyczne związane z kodowaniem i dekodowaniem pozycji w kolejnych iteracjach Trójkąta Sierpińskiego.

Wielościany jednorodne inspiracją w poznawaniu geometrii przestrzennej

Mgr Iwona Sitnik-Szumiec oraz uczniowie klasy matematycznej XX Liceum Ogólnokształcącego im. Leopolda Staffa

w Krakowie (Piotr Kuraś, Maciej Zając, Maciej Ficek) opowiedzieli o projekcie „Wielościany jednorodne”, w którym uczestniczą od czterech lat. Realizowany jest on pod patronatem Oddziału Krakowskiego Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki, a opiekunem merytorycznym jest dr Bronisław Pabich. Młodzi ludzie na zajęciach pozalekcyjnych konstruują przepiękne modele, które powstają z wielościanów platońskich lub archimedowskich przez przecinanie ich płaszczyznami w taki sposób, aby uzyskane przekroje stanowiły wielokąty foremne niekoniecznie wypukłe. Efektem ich pracy jest kolekcja – czwarta na świecie pod względem wielkości. Uczniowie na przykładzie wielkiego sześcioośmiościanu romboidalnego zaprezentowali specyfikę budowy wielościanów jednorodnych.

Odkrywanie matematyki i zadziwienie jej pięknem

Dr Bronisław Pabich przedstawił ciekawe propozycje zastosowania programu GeoGebra w dynamicznym odkrywaniu piękna konstrukcji geometrycznych. W swoim wystąpieniu udowodnił, że rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem tego ogólnodostępnego oprogramowania może być dynamiczne, interaktywne i przyjemne. Umożliwia nauczycielom i uczniom tworzenie wizualizacji pojęć i problemów matematycznych, animacji i pokazów. To doskonałe narzędzie, które można wykorzystać do eksperymentowania, tworzenia modeli figur i przekształceń, a także przygotowywania ilustracji do zadań.

Uczniowie na matematycznych ścieżkach, czyli obserwujemy świat przez matematyczne okulary

Mgr Gabriela Dolińska ze Szkoły Podstawowej nr 8 im. Jana Pawła II w Trzebini zaprezentowała w sposób praktyczny „matematyczne wędkę”, na której od wielu lat „łowi” uczniów i wciąga ich w wir rozmaitych działań. W czasie konferencji zorganizowała mini *escape room* i zaprosiła do wspólnej zabawy nauczycieli. Następnie zaprezentowała filmowe relacje z projektów, realizowanych we współpracy z Fundacją mBanku. Prelegentka udowodniła, że podejmowane działania kreują pozytywny wizerunek matematyki, inspirować zarówno uczniów, jak i nauczycieli do większej aktywności i poszukiwania nowych rozwiązań. Jako nauczyciel praktyk podała niezbitą dowody, że matematyka jest ciekawa, można jej uczyć w atrakcyjny sposób i czerpać radość ze swojej pracy.

Konferencji towarzyszyły wystawy prac uczniowskich:

- „Kolekcja Wielościanów Jednorodnych” – uczniowie prezentowali wielościany wykonane przez uczestników koła matematycznego działającego w XX Liceum Ogólnokształcącym w Krakowie;
- „Świat widziany przez matematyczne okulary” – prace projektowe (plakaty, prezentacje, makiety) wykonane przez uczniów ze Szkoły Podstawowej nr 8 w Trzebini.

Konferencja stała się dla uczestników inspiracją do podejmowania ciekawych, niekonwencjonalnych działań w pracy z uczniami. Reasumując wystąpienia prelegentów, można stwierdzić, że „matematycznie zakręcenie” nauczyciele:

- stosują metody i techniki aktywizujące, sprzyjające samodzielności myślenia i działania, a także kształtowaniu pozytywnej motywacji do uczenia się;

- wzmacniają zaangażowanie uczniów poprzez wprowadzanie efektu zaskoczenia, zaciekawienia, nowości i zabawy;
- wykorzystują na zajęciach nowoczesne, odpowiednio dobrane środki dydaktyczne, w tym technologie informacyjno-komunikacyjne;
- tworzą sytuacje dydaktyczne, umożliwiające uczniom eksperymentowanie, odkrywanie, pobudzanie ich twórczej aktywności.

Słowa kluczowe: nauczanie matematyki, twórcze inspiracje, kreatywność.



Halina Pulchny – nauczyciel konsultant ds. matematyki MCDN Ośrodek w Krakowie, nauczyciel dyplomowany z wieloletnim doświadczeniem, egzaminator w zakresie egzaminu gimnazjalnego i ósmoklasisty z matematyki, członek Oddziału Krakowskiego Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki.

„Jan Paweł II - Polak, Papież, Człowiek. Historia ukryta w lapbooku” – konkurs dla uczniów kl. IV–VI szkół podstawowych

Pedagogiczna Biblioteka Wojewódzka w Krakowie wraz z Filiami w Chrzanowie, Miechowie, Nowej Hucie, Oświęcimiu, Proszowicach i Słomnikach w ramach uczczenia obchodów Roku Świętego Jana Pawła II zaprasza uczniów szkół podstawowych wraz z opiekunami do wzięcia udziału w VI Konkursie Filialnym.

Cele konkursu:

- upamiętnienie Roku Świętego Jana Pawła II, upowszechnienie wiedzy o życiu i twórczości Papieża;
- kształtowanie umiejętności samodzielnego wyszukiwania informacji na określony temat i selekcji zgromadzonych materiałów;
- promowanie nowatorskich metod i form pracy;
- pobudzanie kreatywności, kształtowanie wyobraźni i wrażliwości estetycznej uczestników.

Adresaci: uczniowie klas IV–VI szkół podstawowych z miasta i gminy Kraków oraz powiatów: chrzanowskiego, krakowskiego, miechowskiego, oświęcimskiego i proszowickiego.

Zadanie: samodzielne wykonanie lapbooka związanego z postacią Jan Pawła II.

Terminy:

do 31 III 2020 roku	składanie prac konkursowych
do 7 IV 2020 roku	rozstrzygnięcie etapu eliminacji, ogłoszenie listy osób, których prace zostały zakwalifikowane do finału
do 30 IV 2020 roku	rozstrzygnięcie konkursu, ogłoszenie wyników
13 V 2020 roku o godz. 11:00	wręczenie nagród laureatom konkursu w Pedagogicznej Bibliotece Wojewódzkiej w Krakowie (al. F. Focha 39)

- Prace należy składać w poszczególnych Filiach (zgodnie z powiatem) – osobiście lub pocztą na adres:
- Pedagogiczna Biblioteka Wojewódzka w Krakowie, Filia w Chrzanowie, al. Henryka 53, 32-500 Chrzanów;
- Pedagogiczna Biblioteka Wojewódzka w Krakowie, Filia w Miechowie, ul. Ks. Skurupki 4, 32-200 Miechów;
- Pedagogiczna Biblioteka Wojewódzka w Krakowie, Filia w Nowej Hucie, os. Kościuszkowskie 2A, 31-858 Kraków (placówki z miasta i gminy Kraków);
- Pedagogiczna Biblioteka Wojewódzka w Krakowie, Filia w Oświęcimiu, ul. Bema 4, 32-600 Oświęcim;
- Pedagogiczna Biblioteka Wojewódzka w Krakowie, Filia w Proszowicach, ul. 3 Maja 91, 32-100 Proszowice;
- Pedagogiczna Biblioteka Wojewódzka w Krakowie, Filia w Słomnikach, ul. Kościuszki 26, 32-090 Słomniki (powiat krakowski).

Dla laureatów konkursu przewidziano nagrody rzeczowe i dyplomy. Osoby wyróżnione otrzymają dyplomy i drobne upominki. Pozostali uczniowie (finałści), których prace zostały zakwalifikowane do drugiego etapu, otrzymają dyplomy uczestnictwa. **Więcej informacji oraz regulamin konkursu dostępne są na stronie Pedagogicznej Biblioteki Wojewódzkiej w Krakowie:** <https://www.pbw.edu.pl/wydarzenia/1458-jan-pawel-ii-polak-papiez-czlowiek-historia-ukryta-w-lapbooku-konkurs-dla-uczniow-kl-iv-vi-szkol-podstawowych>

Zachęcamy do wzięcia udziału w konkursie!

Aldona Kruk – Filia Pedagogicznej Biblioteki Wojewódzkiej w Nowej Hucie.

**Zapraszamy do korzystania z oferty edukacyjnej
Małopolskiego Centrum Doskonalenia Nauczycieli**
www.mcdn.edu.pl

**MAŁOPOLSKIE CENTRUM
DOSKONALENIA NAUCZYCIELI**

ul. Lubelska 23, 30-003 Kraków
tel. + 48 12 623 76 46, + 48 12 623 76 56; fax + 48 12 623 77 41
www.mcdn.edu.pl
e-mail: biuro@mcdn.edu.pl

MCDN Ośrodek w Krakowie

ul. Garbarska 1, 31-131 Kraków
tel. + 48 12 422 14 49, +48 12 422 86 13 w. 35; fax +48 12 422 30 26
www.krakow.mcdn.edu.pl
e-mail: bok.krakow@mcdn.edu.pl

BIURO OBSŁUGI KLIENTA: tel.: +48 12 422 14 49; tel. kom. 513 042 381

MCDN Ośrodek w Nowym Sączu

ul. Jagiellońska 61, 33-300 Nowy Sącz
tel. +48 18 443 71 72, + 48 18 443 80 81 w. 23
tel./fax +48 18 443 71 72 w. 18
www.nowysacz.mcdn.edu.pl
e-mail: bok.nowysacz@mcdn.edu.pl

BIURO OBSŁUGI KLIENTA: tel.: +48 18 443 71 72 w. 25; tel. kom. 513 042 386

MCDN Ośrodek w Oświęcimiu

ul. Bema 4, 32-600 Oświęcim
tel. +48 33 844 43 14; fax +48 33 844 42 93
www.oswiecim.mcdn.edu.pl
e-mail: bok.oswiecim@mcdn.edu.pl

BIURO OBSŁUGI KLIENTA: tel.: +48 33 844 43 14 w. 33; tel. kom. 513 042 427

MCDN Ośrodek w Tarnowie

ul. Nowy Świat 30, 33-100 Tarnów
tel. +48 14 688 88 10, fax +48 14 688 88 11
www.tarnow.mcdn.edu.pl
e-mail: bok.tarnow@mcdn.edu.pl

BIURO OBSŁUGI KLIENTA: tel.: +48 14 688 88 10 w. 118; tel. kom. 513 042 389

